

Trajectoire d'un mobile soumis à une force de frottement quadratique en v : distance normalisée et paramétrisation

Alexandre Vial

Version du 20 février 2008

Résumé

Nous étudions la trajectoire d'un projectile soumis à la résistance de l'air, modélisée par une force proportionnelle au carré de la vitesse. Après avoir établi les équations du mouvement, nous effectuons la résolution analytique aussi loin que possible. Le problème est alors résolu numériquement pour obtenir une formulation normalisée de la distance horizontale, qui peut être paramétrisée afin de pouvoir aisément étudier par la suite l'influence de divers paramètres.

1 Introduction

La trajectoire parabolique d'un projectile soumis à la seule force de pesanteur est bien connue des étudiants en physique, tout comme l'expérience de la chute de la bille. L'introduction d'une force de frottement proportionnelle à la vitesse se traite analytiquement à 1D et 2D, mais le cas d'une force proportionnelle au carré de la vitesse (plus réaliste, mais malgré tout imparfaite [1, 2]) n'est généralement traité que pour le cas d'une trajectoire 1D [3, 4].

Le cas d'une trajectoire 2D n'est que très rarement abordé car il n'existe pas de solution analytique pour la position, même si diverses solutions approchées ont été proposées [5, 6, 7, 8]. Cependant, la vitesse peut se calculer analytiquement comme on le verra dans la partie 2. Il est alors possible de calculer la distance horizontale parcourue à l'aide d'une intégration numérique, puis d'étudier l'influence de paramètres tels que la vitesse initiale ou l'angle de départ. L'introduction d'une distance normalisée dans la partie 3, puis sa paramétrisation, permettent de faciliter ce type d'étude.

2 Solution semi-analytique

2.1 Formalisme de base

On cherche à décrire la trajectoire d'un mobile M , de masse m , soumis à la pesanteur, en tenant compte de la résistance de l'air. Pour cela, on utilise le repère de Frénet (figure 1). La vitesse initiale et l'angle de départ sont respectivement v_0 et α_0 . Dans ce repère, le rayon de courbure vaut $r = -ds/d\alpha$, la vitesse $v = ds/dt = ds/d\alpha \cdot d\alpha/dt = -r d\alpha/dt$ est portée par la tangente \mathbf{T} à la trajectoire, et l'accélération se décompose sur \mathbf{T} et sur la normale à la trajectoire \mathbf{N} en

$$\begin{cases} \gamma_T = \frac{dv}{dt}, \\ \gamma_N = \frac{v^2}{r} = -v \frac{d\alpha}{dt}. \end{cases} \quad (1)$$

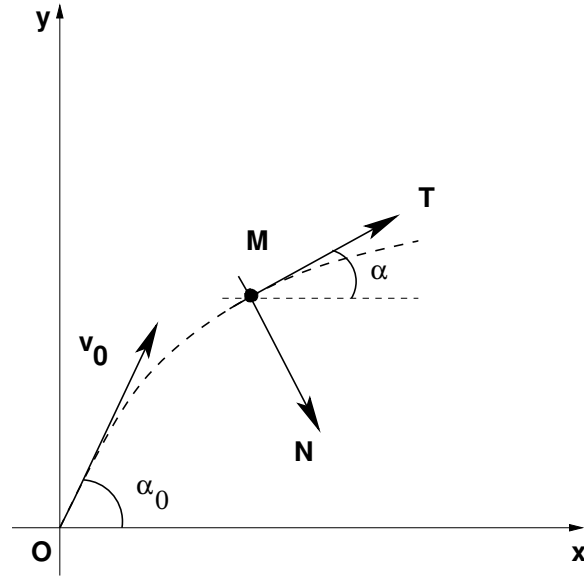


FIGURE 1 – Trajectoire et repère de Frénet

La résistance de l'air est caractérisée par une force $R(v)$ qui s'oppose au mouvement, colinéaire à \vec{v} mais de sens opposé. Par conséquent, on obtient comme équations du mouvement :

$$\begin{cases} m \frac{dv}{dt} = -mg \sin \alpha - R(v), \\ v \frac{d\alpha}{dt} = -g \cos \alpha. \end{cases} \quad (2)$$

On en déduit

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{d\alpha} = \tan \alpha + \frac{R(v)}{mg \cos \alpha}, \quad (3)$$

il s'agit de l'équation fondamentale de la balistique, parfois appelée «équation de l'hodographe» [9].

2.2 Calcul de la vitesse

Pour $R(v) = \lambda v^n$, l'équation (3) est une *équation différentielle de Bernoulli*. On peut la résoudre par exemple grâce à une méthode proposée par Legendre [10, 11] (une autre méthode est présentée dans [12] directement pour $n = 2$, et historiquement Leibniz est le premier à avoir résolu ce type d'équation dès 1696). En posant

$$\frac{1}{v^n} = pq, \quad (4)$$

on obtient après différenciation $-n \frac{1}{v} \frac{dv}{d\alpha} = pdq + qdp$, et l'équation (3) peut se mettre sous la forme

$$p(dq + nq \tan \alpha d\alpha) + qdp + n \frac{\lambda}{mg \cos \alpha} d\alpha = 0. \quad (5)$$

On annule le coefficient de p , ce qui conduit à $\frac{dq}{q} = -n \tan \alpha d\alpha$, soit $q = \cos^n \alpha$. On obtient alors

$$dp = -\frac{1}{q} n \frac{\lambda}{mg \cos \alpha} d\alpha = -\frac{n\lambda}{mg \cos^{n+1} \alpha} d\alpha, \text{ et par intégration}$$

$$p = -\frac{n\lambda}{mg} \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{du}{\cos^{n+1} u} + p_0 = p(\alpha) + p_0, \quad (6)$$

la constante p_0 étant déterminée à l'aide des conditions initiales sur v . Pour $\alpha = \alpha_0$, $v(\alpha) = v_0$, et d'après (4) $\frac{1}{v_0^n} = (p(\alpha_0) + p_0) \cdot g = p_0 \cos^n \alpha_0$ (car $p(\alpha_0) = 0$), on en déduit

$$p_0 = \frac{1}{v_0^n \cos^n \alpha_0}, \quad (7)$$

on peut alors expliciter la formule (4) :

$$\frac{1}{v^n} = -\frac{n\lambda \cos^n \alpha}{mg} \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{du}{\cos^{n+1} u} + \frac{\cos^n \alpha}{v_0^n \cos^n \alpha_0}. \quad (8)$$

2.3 Application à la résistance de l'air

Comme on l'a précisé en introduction, la résistance de l'air peut être traitée avec $n = 2$.

On a donc $p_0 = \frac{1}{v_0^2 \cos^2 \alpha_0}$ et

$$p(\alpha) = -\frac{2\lambda}{mg} \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{du}{\cos^3 u} = -\frac{\lambda}{mg} \left[\ln\left(\tan\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right) + \frac{\sin u}{\cos^2 u} \right]_{\alpha_0}^{\alpha}, \quad (9)$$

soit

$$\frac{1}{v^2} = -\frac{\lambda \cos^2 \alpha}{mg} \left[\ln\left(\tan\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right) + \frac{\sin u}{\cos^2 u} \right]_{\alpha_0}^{\alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{v_0^2 \cos^2 \alpha_0}. \quad (10)$$

Après un temps suffisamment long, on sait que α doit tendre vers $-\pi/2$. On peut donc trouver la vitesse limite de chute :

$$\lim_{\alpha \rightarrow -\pi/2} \frac{1}{v^2} = -\frac{\lambda}{mg} \cdot \sin \alpha = \frac{\lambda}{mg}, \quad (11)$$

on retrouve ainsi le résultat connu dans le cas d'une chute libre [13], à savoir

$$v_{lim} = \sqrt{\frac{mg}{\lambda}} \quad (12)$$

(les forces de frottement compensent la gravitation, la vitesse reste donc constante).

On a donc pour finir

$$v^2(\alpha) = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha_0}{\cos^2 \alpha \left(1 - \frac{v_0^2}{v_{lim}^2} \cos^2 \alpha_0 \left[\ln\left(\tan\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right) + \frac{\sin u}{\cos^2 u} \right]_{\alpha_0}^{\alpha} \right)}. \quad (13)$$

Le calcul de la position se fait à l'aide des équations

$$\begin{cases} dx = v(\alpha) \cos \alpha dt = -\frac{1}{g} v^2(\alpha) d\alpha \\ dy = v(\alpha) \sin \alpha dt = -\frac{1}{g} v^2(\alpha) \tan \alpha d\alpha \end{cases} \quad (14)$$

et par intégration on trouve

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{g} \int_{\alpha_0}^{\alpha} v^2(u) du + x_0 \\ y = -\frac{1}{g} \int_{\alpha_0}^{\alpha} v^2(u) \tan(u) du + y_0 \end{cases} \quad (15)$$

En conclusion, on est passé du système d'équations différentielles couplées (2) et (14)

$$\begin{cases} \dot{x} = v \cos \alpha \\ \dot{y} = v \sin \alpha \\ \dot{v} = -g \sin \alpha - \frac{\lambda}{m} v^2 \\ \dot{\alpha} = -g \frac{\cos \alpha}{v} \end{cases} \quad (16)$$

à une formule analytique (13) et deux calculs d'intégrales (15) pour obtenir x et y . Nous allons donc pouvoir étudier l'influence des frottements sur la distance que peut parcourir un projectile.

2.4 Longueur de l'arc parcouru

Bien que cela ne soit en rien utile à la suite de l'étude, il est intéressant de constater qu'à partir des équations déjà établies, on peut assez facilement déterminer l'abscisse curviligne s parcourue en fonction de α [12]. En effet, en comparant (1) et (2), et en utilisant le fait que $ds = -r d\alpha$, on obtient

$$\frac{v^2}{r} = g \cos \alpha \Rightarrow ds = -\frac{v^2}{g \cos \alpha} d\alpha, \quad (17)$$

et donc avec (13)

$$ds = -\int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha_0}{g \cos^3 \alpha \left(1 - \frac{v_0^2}{v_{lim}^2} \cos^2 \alpha_0 \left[\ln\left(\tan\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right) + \frac{\sin u}{\cos^2 u} \right]_{\alpha_0}^{\alpha} \right)} d\alpha. \quad (18)$$

Or d'après (9), l'intégrand dans (18) est de la forme u'/u , et ds peut donc s'intégrer aisément sous la forme

$$s = \frac{v_{lim}^2}{2g} \ln \left(1 - \frac{v_0^2}{v_{lim}^2} \cos^2 \alpha_0 \left[\ln\left(\tan\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right) + \frac{\sin u}{\cos^2 u} \right]_{\alpha_0}^{\alpha} \right). \quad (19)$$

Il semble que Euler soit le premier à avoir obtenu cette expression (voir l'avant-propos dans [2]).

3 Étude numérique

3.1 Distance normalisée

À partir des équations (13) et (15) on peut tracer $y = f(x)$ (figure 2).

Si on s'intéresse à la distance horizontale d parcourue par le projectile, il faut tout d'abord déterminer l'angle α_s pour lequel y s'annule. On peut utiliser pour cela un algorithme de type Newton, en partant d'une valeur initiale $\alpha_s = -\alpha_0$ qui correspond au cas sans frottement. On applique alors la formule

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k - \frac{y(\alpha_k)}{y'(\alpha_k)} = \alpha_k - \frac{\int_{\alpha_0}^{\alpha_k} v^2(u) \tan(u) du}{v^2(\alpha_k) \tan(\alpha_k)} \quad (20)$$

jusqu'à ce que la valeur $|\alpha_{k+1} - \alpha_k|$ soit inférieure à une valeur fixée à l'avance, par exemple $0,01^\circ$. Une fois α_s déterminé, on calcule $d = x(\alpha_s) - x_0$ à l'aide de l'équation (15), ce qui correspond à la distance parcourue horizontalement.

On peut constater d'après (20) que α_s ne dépend en fait que de α_0 et du rapport v_0/v_{lim} que l'on appellera désormais vitesse normalisée et que l'on notera v_{norm} . De même, si on normalise d par la distance parcourue en l'absence de frottement, à savoir

$$d_{ref} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha_0, \quad (21)$$

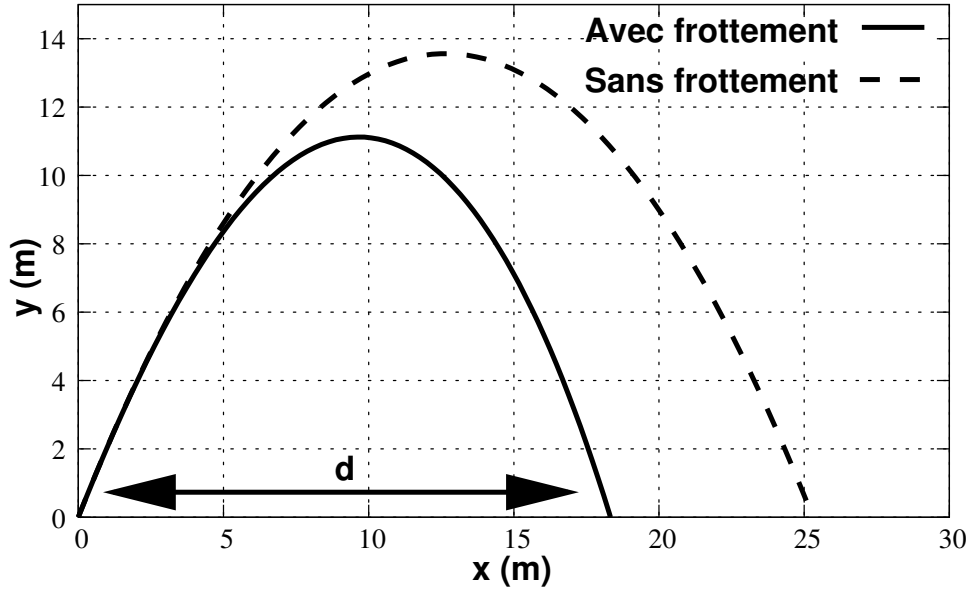


FIGURE 2 – Trajectoire d'un projectile avec et sans force de frottement proportionnelle à v^2 .

alors $d_{norm} = d/d_{ref}$ est uniquement une fonction de α_0 et de v_{norm} , cette quantité normalisée peut par conséquent être calculée indépendamment de la valeur du rapport λ/m . On obtient donc un résultat général à partir duquel l'influence des différents paramètres pourra aisément être étudiée. La distance normalisée est représentée sur la figure 3.

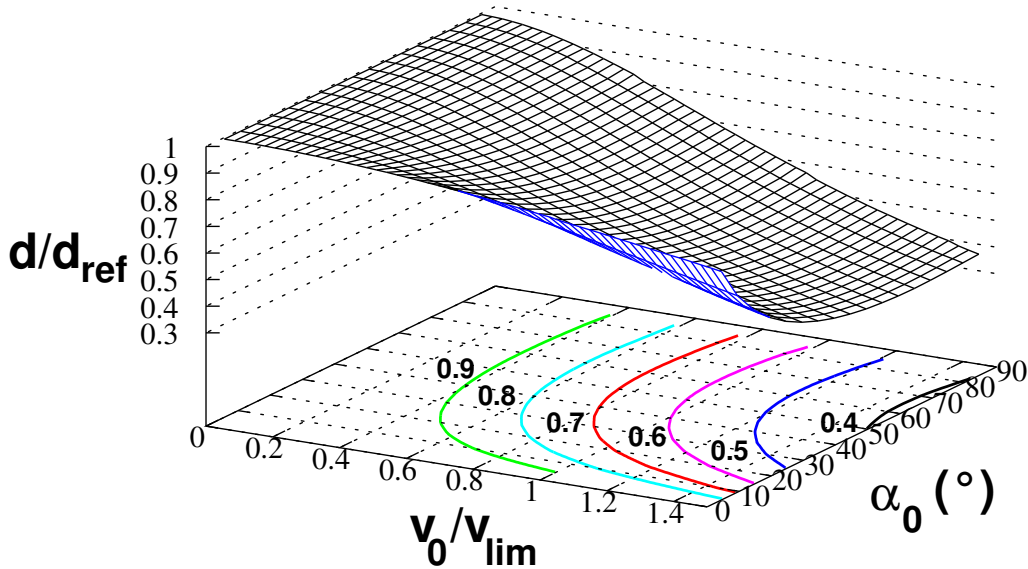


FIGURE 3 – Distance normalisée $d_{norm} = d/d_{ref}$ en fonction de la vitesse normalisée $v_{norm} = v_0/v_{lim}$ et de l'angle α_0 .

3.2 Paramétrisation

Afin de pouvoir étudier facilement d_{norm} , nous allons chercher à paramétriser cette fonction. Pour α_0 fixé, on observe que l'on peut décrire d_{norm} en fonction de v_{norm} à l'aide d'une fonction de Pearson VII (voir la figure 4 pour $\alpha_0 = 45^\circ$) :

$$d_{norm} = \left(1 + K^2 \frac{v_{norm}^2}{M} \right)^{-M} . \quad (22)$$

Pour $M = 1$, cette fonction est une lorentzienne, et pour $M \rightarrow \infty$, il s'agit d'une gaussienne (cf. annexe A).

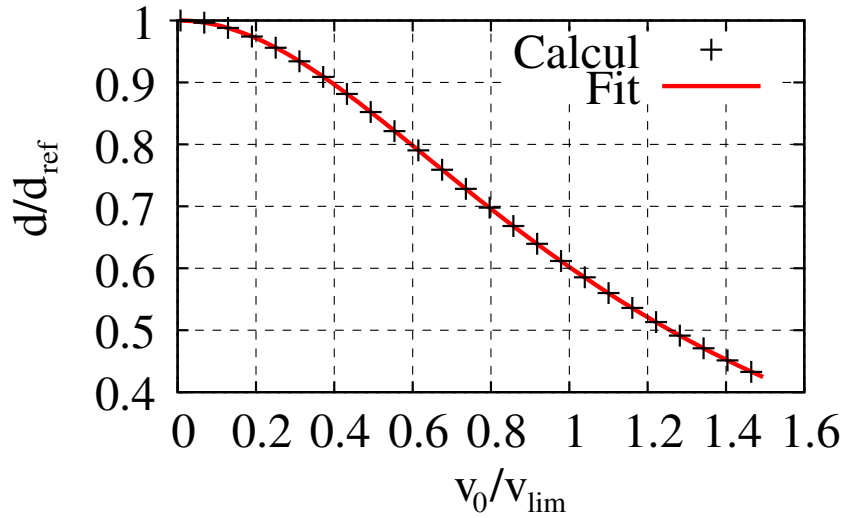


FIGURE 4 – Distance normalisée en fonction de la vitesse normalisée pour $\alpha_0 = 45^\circ$: calcul et «fit» à l'aide d'une fonction de Pearson VII.

Les paramètres K et M sont donc des fonctions de α_0 , leurs variations respectives sont représentées sur les figures 5(a) et 5(b). Ces paramètres peuvent facilement être décrits par des polynômes

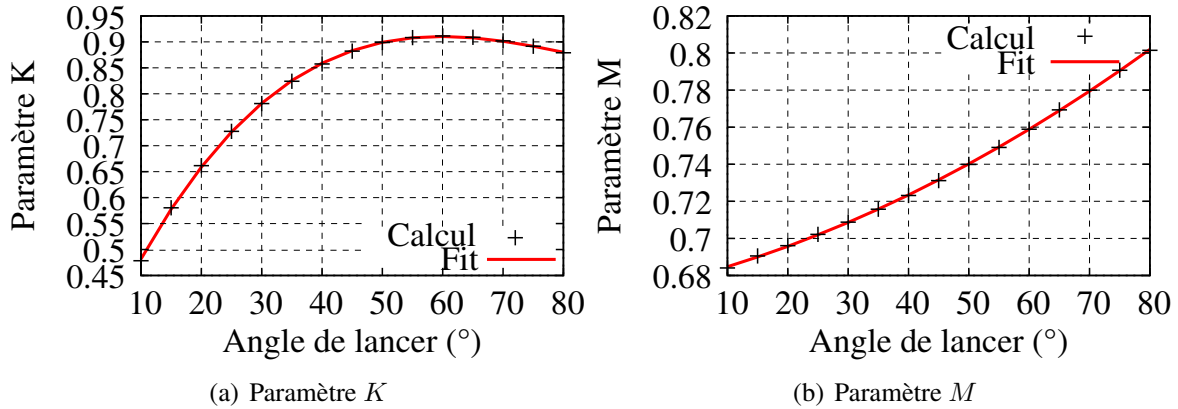


FIGURE 5 – Paramètres K et M en fonction de l'angle de lancer α_0 .

$$P_N(\alpha_0) = \sum_{i=0}^{i=N} a_i \alpha_0^i \text{ de degrés 3 et 2, dont les coefficients } a_i \text{ sont donnés dans la table 1.}$$

	a_0	a_1	a_2	a_3
Paramètre K	0,24207	1,56854	-1,16548	0,26454
Paramètre M	0,675688	0,046397	0,031539	

TABLE 1 – Coefficients des polynômes décrivant $K(\alpha_0)$ et $M(\alpha_0)$ (pour α_0 en radians).

À l'aide des coefficients de la table 1 et de l'équation (22), on retrouve les valeurs calculées pour obtenir la figure 3 avec une erreur relative inférieure à 0,2%. On peut donc considérer que le calcul de la distance parcourue par un projectile a été considérablement simplifié par rapport au problème initial qui consistait à utiliser les équations (15) après avoir résolu (20). Les influences respectives de v_0 , v_{lim} et α_0 peuvent donc à présent être étudiées sans difficulté.

3.3 Exemple d'application

Nous nous intéressons à l'influence de l'angle de lancer sur la distance parcourue. En l'absence de frottement, la distance est donnée par la formule (21), elle est donc maximale pour $\alpha_0 = 45^\circ$, et la distance parcourue sera la même pour $\alpha_0 = 45^\circ \pm \phi$, ϕ variant entre 0 et 45° . Si l'on tient compte des frottements, la distance parcourue n'est plus symétrique par rapport à $\alpha_0 = 45^\circ$, une étude rapide de la figure 3 semble indiquer que la distance sera plus grande pour les angles inférieurs à 45° , ce qui est généralement ce que nous dicte notre intuition. Si cela est bien exact pour notre étude comme on le verra par la suite, il faut cependant se méfier de l'intuition pour des frottements en v^n avec $n \geq 3,5$ car l'angle optimal de lancer peut alors être supérieur à 45° [14].

Dans le cas présent, à partir du travail effectué dans la partie 3.2, il est facile de calculer d pour v_0 fixé en faisant varier l'angle α_0 , puis de voir pour lequel de ces angles d est maximal. Nous avons effectué le calcul pour une balle de baseball avec $\lambda/m = 0,005376 \text{ m}^{-1}$, soit $v_{lim} = 42,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ [7, 12] et $v_0 = v_{norm} \cdot v_{lim}$, le résultat est présenté figure 6.

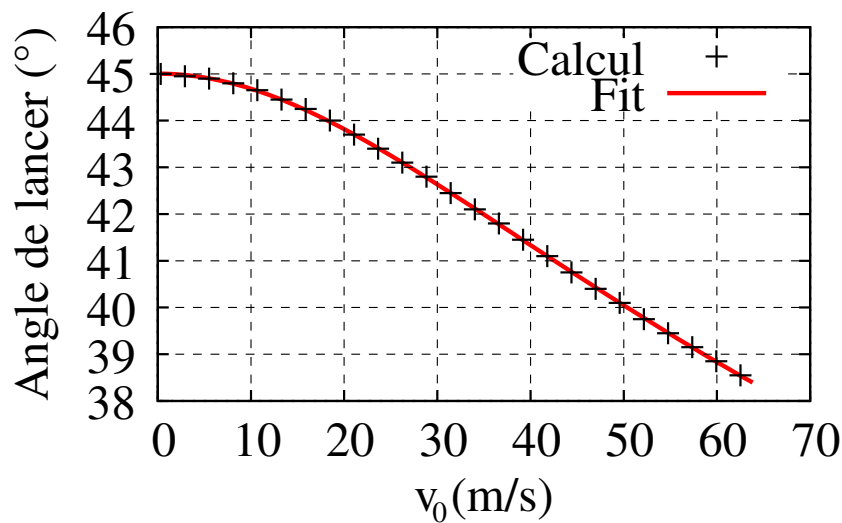


FIGURE 6 – Angle de lancer permettant d'obtenir la distance maximale en fonction de v_0 pour $v_{lim} = 42,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

On constate bien que lorsque v_0 augmente, l'angle permettant d'obtenir la distance maximale diminue. La forme de la courbe nous incite à chercher une loi de comportement une nouvelle fois décrite pour une loi de Pearson : $\alpha_{max} = h \left(1 + K^2 \frac{v_0^2}{M} \right)^{-M}$. On impose $h = 45^\circ$, et l'optimisation des deux autres paramètres conduit à $K = 0,0085864 \text{ s} \cdot \text{m}^{-1}$ et $M = 0,1366571$, ce qui donne une erreur relative maximale inférieure à 0,08% ! Le choix de cette fonction est donc validé.

Le lecteur curieux pourra vérifier qu'à l'aide des paramètres donnés dans la partie 3.2, il obtiendra aisément les résultats relatifs aux valeurs utilisées dans la référence [5], avec cependant un léger écart dû au fait que le rapport v_0/v_{lim} dans cet ouvrage ($\sqrt{10} \approx 3,16$) est près du double de la valeur maximale considérée ici pour la détermination des paramètres d'interpolation (1, 5).

4 Conclusion

Après avoir montré que le problème de la trajectoire d'un mobile soumis à une force de frottement en v^2 avait une solution analytique pour la vitesse, nous avons déterminé numériquement la distance normalisée en fonction de l'angle de lancer et de la vitesse normalisée.

Nous avons montré que cette distance normalisée pouvait être décrite à l'aide d'une fonction de Pearson VII (généralement utilisée pour la description des pics des spectres de diffraction X), dont les coefficients sont eux-même décrits par des polynômes.

La distance normalisée a ainsi été paramétrisée avec une très bonne précision, ce qui a ensuite permis une étude simple de l'angle optimal de lancer en fonction de la vitesse initiale sans avoir à passer par la résolution fastidieuse de l'équation de l'hodographe et le calcul numérique d'intégrales.

Nous avons vérifié que l'angle permettant d'obtenir la plus grande distance de parcours est inférieur à 45° , et que sa variation en fonction de la vitesse peut encore être décrite par une loi de Pearson.

Il ne faut cependant pas perdre de vue que pour une étude réaliste de balistique, divers phénomènes doivent encore être pris en compte : la déviation due à la force de Coriolis et au mouvement de rotation du projectile sur lui même [15], ainsi que l'utilisation d'une loi de résistance de l'air plus complète, faisant intervenir un terme proportionnel à v^3 en plus du terme en v^2 [1, 2].

Références

- [1] Isidore Didion: *Lois de la résistance de l'air sur les projectiles*. J. Dumaine, 1857. [En ligne](#).
- [2] Isidore Didion: *Traité de balistique*. Mallet-Bachelier, deuxième édition, 1860. [En ligne](#).
- [3] J. Lindemuth: *The effect of air resistance on falling balls*. Am. J. Phys., 39 :757–759, 1971. [Résumé](#).
- [4] P. Timmerman et J. P. van der Weele: *On the rise and fall of a ball with linear or quadratic drag*. Am. J. Phys., 67(6) :538–546, 1999. [Résumé](#).
- [5] Adrien Marie Legendre: *Exercices de calcul intégral*, tome 1, pages 330–336. Courcier, 1811. [En ligne](#).
- [6] G. W. Parker: *Projectile motion with air resistance quadratic in the speed*. Am. J. Phys., 45(7) :606–610, 1977. [Résumé](#).
- [7] P. S. Chudinov: *The motion of a point mass in a medium with a square law of drag*. J. Appl. Maths Mechs, 65(3) :421–426, 2001. [Résumé](#).
- [8] P. S. Chudinov: *Analytical investigation of point mass motion in midair*. Eur. J. Phys., 25 :73–79, 2004. [Résumé](#).
- [9] Jules Drach: *L'équation différentielle de la balistique extérieure et son intégration par quadratures*. Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, 3(37) :1–94, 1920. [En ligne](#).
- [10] Charles Sturm: *Cours d'analyse de l'École Polytechnique*, tome 2. Gauthier-Villars, Paris, seconde édition, 1864. [En ligne sur le site de la BNF](#).
- [11] Frédéric Elie: *Balistique extérieure*. [En ligne](#).
- [12] A. Tan, C. H. Frick et O. Castillo: *The fly ball trajectory : An older approach revisited*. Am. J. Phys., 55(1) :37–40, 1987. [Résumé](#).
- [13] C. Gruber et W. Benoit: *Mécanique générale*. PPU Romandes, 1998.
- [14] R. H. Price et J. D. Romano: *Aim high and go far - Optimal projectile launch angles greater than 45°* . Am. J. Phys., 66(2) :109–113, 1998. [Résumé](#).
- [15] Siméon Denis Poisson: *Recherches sur le mouvement des projectiles dans l'air*. Bachelier, 1839. [En ligne](#).

A Fonction de Pearson pour $M \rightarrow \infty$

Soit $y = (1 + K^2 \frac{x^2}{M})^{-M}$, on sait que $a^b = e^{b \ln a}$. Par conséquent on peut écrire

$$y = \exp\left(-M \ln\left(1 + K^2 \frac{x^2}{M}\right)\right),$$

or si $M \rightarrow \infty$ alors $\ln(1 + K^2 \frac{x^2}{M}) \approx K^2 \frac{x^2}{M}$ et donc $y \approx \exp(-K^2 x^2)$, il s'agit donc d'une gaussienne.