Cadrans déclinants

Alexandre Vial

8 août 2005

1 Formules de base

Je pars des formules publiées par O. Tomas [1].

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_q & = & \kappa CI^q \cos\delta \frac{-\sin\theta\cos i\cos H-(\cos\phi\sin i-\sin\phi\cos\theta\cos i)\sin H}{A\sin\delta-B\cos\delta\cos H-\sin\theta\sin i\cos\delta\sin H} \\ y_q & = & \kappa CI^q \cos\delta \frac{\cos\theta\cos H+\sin\phi\sin\theta\sin H}{A\sin\delta-B\cos\delta\cos H-\sin\theta\sin i\cos\delta\sin H} \end{array}\right. \tag{1}$$

avec

$$\left\{\begin{array}{rcl} A & = & \cos\phi\cos\theta\sin i-\sin\phi\cos i \\ B & = & \sin\phi\cos\theta\sin i+\cos\phi\cos i \end{array}\right. \tag{2}$$

et

$$\left\{\begin{array}{rcl} \kappa & = & +1 \text{ si } A>0 \\ \kappa & = & -1 \text{ si } A<0 \end{array}\right. \tag{3}$$

(pour rappel : δ est la déclinaison, H l'angle horaire, ϕ la latitude, i l'inclinaison de la table, θ la déclinaison, CI^q la longueur du style).

2 Calculs complémentaires

2.1 Lignes de déclinaison

Avec les formules précédentes, on peut tracer les lignes de déclinaisons, même lorsque le Soleil est couché. On sait que l'angle horaire pour lequel le Soleil se lève ou se couche est calculé avec la formule

$$\cos H = -\tan\phi\tan\delta \tag{4}$$

et que par ailleurs à ce moment là

$$\cos A = -\frac{\sin\delta}{\cos\phi}. \tag{5}$$

En remplaçant $\cos H$ dans l'équation (1) par la formule (4), on obtient[1] (il n'y a pas besoin de chercher à exprimer $\sin H$ pour obtenir ce résultat) :

$$y^{lim} = -\kappa C I^q \frac{\sin\phi}{\sin i} \tag{6}$$

qui est la valeur supérieure de y_q défini par l'équation (1) si l'on ne trace les courbes que lorsque le Soleil est au dessus de l'horizon. Il est remarquable que cette valeur soit indépendante de δ, d'un autre coté lorsque le Soleil se lève ou se couche, on est dans le cas limite $h = 0$ et la position de l'ombre de l'extrémité du style correspond à la projection horizontale de cette dernière sur la table du cadran, donc c'est finalement tout à fait normal.

2.2 Lignes horaires

Pour déterminer les lignes horaires utiles, on doit également déterminer, pour un plan dont la normale a pour azimut A, pour quelles valeur de l'angle horaire H celui-ci peut-être éclairé. Pour l'instant, on se contentera du cas $i = \pi/2$ (cadran vertical méridional déclinant). Dans ce cas, on part de l'équation

$$\tan A = \frac{\sin H}{\sin\phi\cos H - \cos\phi\tan\delta}, \tag{7}$$

et après mise au même dénominateur, élévation au carré et remplacement de $\sin H$ et $\cos H$ par les formules en $\tan H$, on obtient une équation du second degré en $\tan^2 H$:

$$(1-\tan^2 A\cos^2\phi\tan^2\delta)\tan^2 H - 2\tan A\sin\phi\tan H - \tan^2 A(\cos^2\phi\tan^2\delta - \sin^2\phi) = 0 \tag{8}$$

En posant $U = \tan A\tan\delta\cos\phi$ et $V = \tan A\sin\phi$, les solutions sont

$$\left\{\begin{array}{lcl} \tan H_1 & = & \frac{V+U\sqrt{1-U^2+V^2}}{1-U^2} \\ \tan H_2 & = & \frac{V-U\sqrt{1-U^2+V^2}}{1-U^2} \end{array}\right. \tag{9}$$

C'est la deuxième solution qu'il faut retenir (pour le vérifier, on injecte la solution H_2 dans l'équation (7) et on doit retrouver la valeur initiale de A), la première correspond à l'équation (7) dans laquelle le signe moins au dénominateur est remplacé par un signe plus (le signe disparaît après l'élévation au carré). Mais il y a encore un petit problème : la valeur de H_2 obtenue correspond à un azimut de $A + \pi$ si $A < -\pi/2$, car la fonction arctan donne les résultats dans l'intervalle $[-\pi/2,\pi/2]$ et $\tan A = \tan(A + \pi)$. On se retrouve

1. le 3 août 2005 à 0h12

donc avec des valeurs de H pour le soir alors qu'on cherche celle du matin. Par exemple dans le cas d'un mur dont l'azimut est $-21°$ et qui est éclairé pour des azimuts allant de $-111°$ à $69°$, l'application de la formule (9) fourni les valeurs de H pour $A = 69°$ même si à l'origine on fournit comme valeur $-111°$.

La ruse de Sioux à utilise consiste à prendre $H_2 - \pi$, qui redonne bien la valeur de A (à π près quand même) initiale à condition d'effectuer le calcul avec $-\delta$ dans l'équation (7), ce qui revient alors à prendre la première solution obtenue en (9)...mais qui ne vérifie pas l'équation (7) avec δ, sauf si on prend $H_1 - \pi$.

Donc pour résumer, il semble bien que la première solution fournisse $H_1 = H + \pi$ pour $A \notin]-\pi/2,\pi/2[$, et que la deuxième fournisse $H_2 = H$ pour des azimuts $A \in [-\pi/2,\pi/2]$.

2.3 Procédure de calcul

Pour tracer un cadran méridional déclinant ($i = 90°$, θ quelconque) d'azimut θ en se limitant aux heures pendant lesquelles le Soleil est visible, on doit procéder comme suit :

- calcul des heures de lever en fonction de la déclinaison,
- calcul des heures de coucher en fonction de la déclinaison,
- calcul des angles horaires correspondant respectivement aux azimuts $\theta - \pi/2$ et $\theta + \pi/2$,
- comparaison des heures de lever/coucher avec les angles horaires précédents afin de déterminer les limites des heures effectivement utiles.

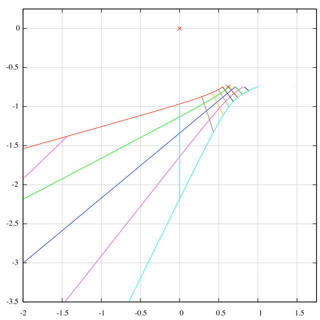
La prochaine étape consiste à réfléchir au cas général $i \neq 90°$.

3 Résultat

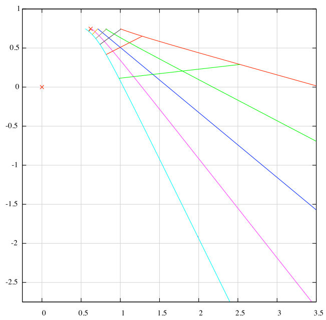
Calculs effectués pour une maison dont la face Sud a pour azimut $-21°$ (figure 1).

Références

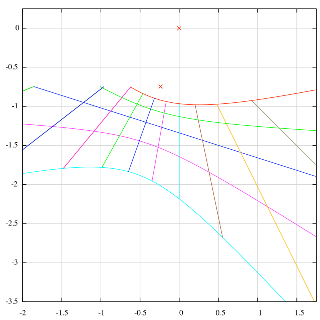
[1] Orlando TOMAS. Les cadrans solaires et l'astrolabe planisphérique sans l'usage de la trigonométrie sphérique. *Bull. Un. Phys*, 868(1):1523–1576, novembre 2004.



(a) Face Ouest



(b) Face Est



(c) Face Sud

Fig. 1 – *Cadrans pour une maison dont l'azimut de la face Sud est* $-21°$.