Addendum à l'article « l'équation du temps, le temps d'une mise en équation »

par **Alexandre VIAL**
Université de Technologie de Troyes - 10010 Troyes
alexandre.vial@utt.fr
et **Orlando TOMAS**
Lycée Henri Bergson - 49000 Angers
orl.tomas@wanadoo.fr

RÉSUMÉ

Il s'agit dans cet addendum à l'article « l'équation du temps, le temps d'une mise en équation », paru dans Le Bup n° 902 de mars 2008, de fournir une autre expression de la fonction $M(f)$ donnant l'anomalie moyenne à partir de l'anomalie vraie. Le calcul numérique de la fonction $M(f)$ ou de sa fonction réciproque $f(M)$ s'en trouve alors considérablement accéléré.

INTRODUCTION

La mise en équation de l'anomalie moyenne M comme fonction de l'anomalie vraie f a été obtenue à l'annexe 1 de l'article [1]. Cette mise en équation « au plus près de la physique » à partir de la troisième loi de Kepler a conduit à l'expression intégrale (2) rappelée ci-dessous, peu rencontrée dans la littérature. Il s'avère alors intéressant de résoudre le problème de la recherche de l'expression analytique explicite de $M(f)$. C'est ce calcul qui est présenté au paragraphe 1 avec sa mise en œuvre informatique dans les paragraphes 2 et 3. Suivent au paragraphe 4 quelques observations sur le gain constaté en durée de calcul. Enfin, au paragraphe 5, en reconnaissant l'expression de l'anomalie excentrique E', nous sommes finalement parvenus à retrouver une formulation plus classique de l'anomalie moyenne, mais sans avoir eu besoin de passer par la démonstration géométrique correspondante (*cf.* [2]).

1. UNE EXPRESSION ANALYTIQUE DE *M*(*f*) PEU COURANTE

Dans notre précédent article [1], nous avions donné au paragraphe 5, avec sa démonstration à l'annexe 1, la formule suivante, notée (2) :

$$M(f) = (1 - e^2)^{3/2} \int_0^f \frac{d\xi}{(1 + e\cos\xi)^2} \tag{2}$$

À l'aide du changement de variable $\cos\xi = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ où $t = \tan(\xi/2)$, il est possible d'obtenir une fraction rationnelle en t, qui après réduction et intégration, conduit à la première forme analytique suivante, sans considération de modulo 2π pour M (*cf.* explications ci-dessous) :

$$M = 2\left(\arctan X - e\,\frac{X}{X^2+1}\right) \tag{3}$$

où

$$X = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\,\tan(f/2) \tag{4}$$

Rappelons maintenant que f, comme M, sont définis dans l'intervalle $[0, 2\pi]$. Quand f passe par la valeur π, X « passe » de $+\infty$ à $-\infty$, donc la fonction :

$$f \to 2\left[\arctan\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{f}{2}\right) - e\,\frac{\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{f}{2}}{\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{f}{2}\right)^2+1}\right]$$

présente en $f = \pi$ une discontinuité d'amplitude 2π en passant de la valeur π à $-\pi$. Pour f appartenant à l'intervalle $]\pi, 2\pi[$, ceci conduit à ajouter 2π à l'expression (3) pour avoir la bonne valeur de M. Ainsi peut-on écrire :

$$\boxed{\begin{cases} M(f) = 2\left[\arctan\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{f}{2}\right) - e\,\frac{\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{f}{2}}{\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{f}{2}\right)^2+1}\right] & si\ 0 \leqslant f \leqslant \pi \\ M(f) = 2\left[\arctan\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{f}{2}\right) - e\,\frac{\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{f}{2}}{\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{f}{2}\right)^2+1}\right] + 2\pi & si\ \pi < f \leqslant 2\pi \end{cases}} \begin{matrix}(5a)\\ \\(5b)\end{matrix}$$

Bien que ces dernières expressions (5a) et (5b) ne soient pas des plus simples, elles permettent, comme nous le développons ci-dessous, un calcul numérique de la fonction $M(f)$, ou de sa fonction réciproque $f(M)$, plus rapide que l'expression intégrale (2).

2. MISE EN ŒUVRE

Pour la méthode 1 (*cf.* [1] § 7.2), il suffit de programmer la fonction $M(f)$ donnée par (5a) et (5b), et de l'échantillonner à pas constant $\Delta f = (2\pi/T_{an}) \times T_{sol}$, tous les $f(i) = \Delta f \times (i-1)$. De là on tire l'équation du centre $Ec(i) = f(i) - M(f(i))$.

Pour la méthode 2 (*cf.* [1] § 7.3), il faut inverser les relations (5a) et (5b) en échantillonnant M à pas constants $\Delta M = (2\pi/T_{an}) \times T_{sol}$, tous les $M(i) = \Delta M \times (i-1)$. Pour chaque valeur $M(i)$, on demande, avec la commande *fsolve*, la résolution numérique de

l'équation $M(i) = 2\left[\arctan\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{f(i)}{2}\right) - e\,\frac{\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{f(i)}{2}}{\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{f(i)}{2}\right)^2+1}\right]$ d'inconnue $f(i)$

en prenant garde au modulo 2π. On peut alors avoir accès à l'équation du centre $Ec = f(i) - M(i)$.

3. PROGRAMMATION INFORMATIQUE

La ligne P2) du tronc commun du programme qui définit la fonction $M(f)$ devient :

P2) Définition de la fonction M(f) sans modulo (que nous notons aM(f))

```
> X := f -> evalf(sqrt((1-e)/(1+e))*tan(f/2));
> aM := f -> evalf((2*arctan(X(f)) - 2*e*X(f)/(X(f)^2+1)));
```

Pour la méthode 1 la ligne P6) devient :

P6) Calcul de la suite des valeurs de M

```
> for i from 1 to imax/2 do
> M[i] := aM (pas_f*(i-1))
> od:
> for i from imax/2+1 to imax do
> M[i] := aM (pas_f*(i-1)) + 2*Pi
> od:
```

Pour la méthode 2, la ligne P7c) prend la forme suivante :

P7c) Résolution de l'équation (2) pour le calcul des f(i) correspondant aux valeurs M(i)

```
> for i from 1 to imax/2 do
> F[i] := fsolve (aM(ff) = (i-1)*pas_M , ff , 0..Pi);
> od:
> for i from imax/2+1 to imax do
> F[i] := fsolve (aM(ff) + 2*Pi  = (i-1)*pas_M , ff , Pi..2*Pi);
> od:
```

Pour $i < imax/2$: dans *fsolve* on rajoute l'option "0..Pi" pour que la solution retournée appartienne à l'intervalle $[0\ ;\ \pi\ [$ (si cette option est absente, on a les valeurs modulo -2π).

Pour $i > imax/2$: on rajoute 2*Pi à aM(ff), car pour i au-delà de imax/2, aM(ff) prend des valeurs comprises dans l'intervalle $]-\pi\ ;\ 0]$ alors que M[i] doit se trouver dans l'intervalle $]\pi\ ;\ 2\pi]$.

4. COMPARAISON DES DURÉES DE CALCUL

Sur la même machine, on observe, pour la méthode 2, des durées de calcul de l'ordre de 6 s, contre 77 s pour la formulation intégrale de notre premier article. On gagne donc un facteur 12 en rapidité !

5. RELATION AVEC L'ANOMALIE EXCENTRIQUE

L'équation (4) fait penser à l'introduction de l'anomalie excentrique E'. On a en effet :

$$\tan(E'/2) = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan(f/2) \qquad (6)$$

En transformant alors (3) avec (4) et (6), on obtient :

$$M = 2\left(\frac{E'}{2} - e\,\frac{\tan(E'/2)}{\tan^2(E'/2)+1}\right) = 2\left(\frac{E'}{2} - e\cos(E'/2)\sin(E'/2)\right) = 2\left(\frac{E'}{2} - \frac{e}{2}\sin E'\right)$$

soit

$$M = (E' - e\sin E')\,. \qquad (7)$$

On retrouve finalement la formule classique (donnée par exemple dans [2], équation (3.3) p. 1563) entre l'anomalie moyenne et l'anomalie excentrique !

La démonstration de la relation (2) présentée dans l'annexe 1 de notre précédent l'article (M comme fonction de f par une intégrale) rend donc inutile le passage par les formules intermédiaires classiques (6) (f comme fonction de E') et (7) (M comme fonction de E') pour finalement accéder à (2) et (3) (M comme fonction de f). Certes, pour étudier analytiquement l'inversion qui donne les angles f ou E' en fonction de t ou de M, l'expression (5) reste moins avantageuse – à cause de sa complexité – que l'équation de Kepler (7) dont la relative simplicité permet de justifier l'écriture de sa solution sous les deux formes classiques suivantes, dues à Laplace et Bessel [4] :

$$E' = M + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_n(ne)}{n}\sin nM \qquad (8)$$

J_n désignant la fonction de Bessel d'indice n, cette série converge pour $e < 1$;

$$E' = M + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{e^n}{n!} \qquad (9)$$

avec

$$2^{n-1} a_n = \sum_{k=0}^{E(n/2)} (-1)^k C_n^k (n-2k)^{n-1}\sin[(n-2k)M]\,, \qquad (10)$$

cette série divergeant dès que e dépasse la limite de Laplace (0,6627...). Mais ces relations (6)-(10) ne sont pas intéressantes pour notre programme informatique.

CONCLUSION

On a abouti à une expression analytique explicite de l'anomalie moyenne comme fonction de l'anomalie vraie. Cette relation est assez rare : par exemple dans [5] il est écrit : *« on peut exprimer l'intégrale* (2) *en terme de fonctions élémentaires, mais les relations sont complexes* […] », et non explicitées. On peut donc tirer ici une forme de satisfaction. En revanche, toujours dans [5], on peut lire à la suite *« et leur inversion pose des problèmes formidables »* : sur ce point, nous n'avons malheureusement pas fait mieux que les séries (8), car nous nous sommes cantonnés à une inversion numérique de $M(f)$, mais au vu de l'équation (3), il est fort peu probable que l'on puisse aboutir à une expression analytique de la fonction $f(M)$ sans développement en série.

BIBLIOGRAPHIE

[1] TOMAS O. « L'équation du temps, le temps d'une mise en équation ». *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.*, mars 2008, vol. 102, n° 902, p. 375-413.

[2] ALHALEL T. « La différence entre le temps solaire moyen et le temps solaire vrai : l'équation du temps ». *Bull. Un. Phys.*, novembre 2001, vol. 95, n° 838 (1), p. 1557-1577.

[3] ALHALEL T. « Saisons et équation du temps sur Mars ». *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.*, mai 2007, vol. 101, n° 894, p. 563-576.

[4] DUTKA J. « A note on Kepler's equation ». *Arch. Hist. Exact. Sci.*, 1997, vol. 51, p. 59-65.

[5] GOLDSTEIN H., POOLE C. et SAFKO J. *Classical mechanics*. 3rd edition, Addison-Wesley Publishing Company, 2002.

Alexandre VIAL
Enseignant-Chercheur
Université de Technologie de Troyes
Troyes (Aube)

Orlando TOMAS
Professeur
Lycée Henri Bergson
Angers (Maine-et-Loire)