

# Lignes de déclinaison d'un cadran solaire plan d'orientation quelconque

Alexandre Vial  
Université de Technologie de Troyes  
Pôle Physique, Matériaux et Nanotechnologies  
12, rue Marie Curie - BP 2060 10010 Troyes  
alexandre.vial@utt.fr

Version originale : A. Vial, Bull. Un. Prof. Phys. Chim., 101(897) :981-998, octobre 2007

## Résumé

Après avoir rappelé le principe de calcul des lignes de déclinaison d'un cadran solaire, les différents types de cadrans sont étudiés : horizontal, incliné, vertical, vertical déclinant, et enfin déclinant incliné. Les relations entre les différents angles caractérisant l'orientation de la table d'un cadran et la déclinaison du Soleil sont établies afin de déterminer le type de ligne de déclinaison. Le cas particulier de la déclinaison nulle est traité à l'aide de considérations géométriques simples.

## 1 Introduction

Nous souhaitons déterminer les lignes de déclinaison d'un cadran solaire dans le cas général. On sait que ces lignes sont des coniques, puisqu'elles correspondent à l'intersection d'un plan avec un cône [1]. Nous exposons tout d'abord le principe du calcul dans la section 2, avant de décrire le cas du cadran horizontal (section 3.1) et de l'étendre au cas particulier du cadran horizontal à l'équateur (section 3.2) puis du cadran incliné (section 3.3). Nous étudions ensuite le cadran vertical (section 4) et le cadran vertical déclinant (section 5). Enfin, nous arrivons au cas le plus général, à savoir le cadran déclinant incliné (section 6). Toutes ces situations et les lignes de déclinaisons associées sont finalement résumées dans trois tableaux (section 7).

## 2 Principe du calcul

Dans un article précédent [2], nous avons montré que le rayon vecteur  $\vec{s}$ , joignant l'extrémité  $B'$  du style du cadran au soleil, décrit, à cause du mouvement diurne du soleil un jour de déclinaison  $\delta_s$ , un cône de demi-angle au sommet  $\pi/2 - \delta_s$  et d'axe le style du cadran, qui est par construction parallèle à l'axe de la Terre (figure 1). L'ombre de l'extrémité  $B'$  du style dans le plan du cadran est notée  $M$ . Elle définit la ligne de déclinaison  $\delta_s$  comme l'intersection du cône précédemment défini avec le plan du cadran.

Il est judicieux de choisir un système de coordonnées adapté au cadran, de manière à ce que l'une des trois coordonnées du point  $M$  soit nulle (la difficulté étant alors de déterminer les coordonnées de  $B'$  dans ce système). L'équation de la trajectoire de  $M$  s'obtient en considérant

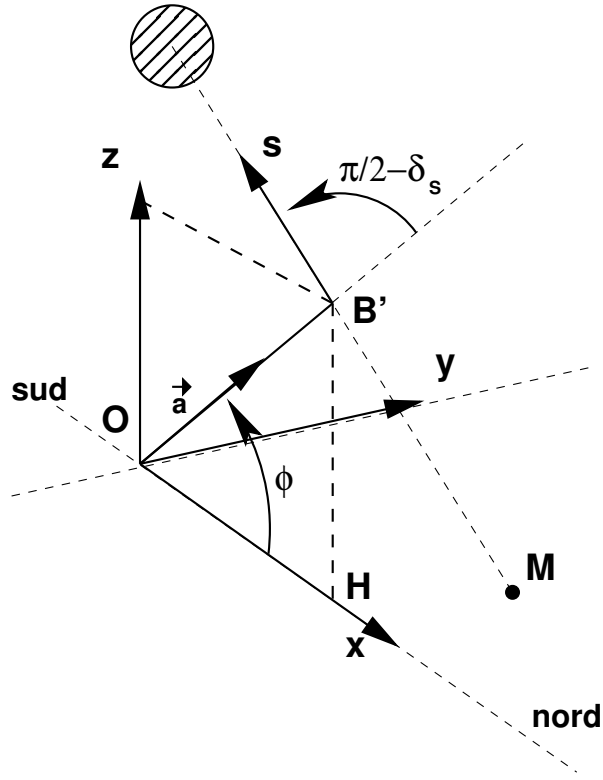


FIG. 1 – Schéma du cadran solaire horizontal.

que, comme on l'a rappelé plus haut, l'angle entre  $\vec{OB}'$  et  $B'M$  (colinéaire à  $\vec{s}$  mais de sens opposé) est constant au cours d'une journée, on peut donc écrire

$$\frac{\vec{OB}' \cdot B'M}{\|\vec{OB}'\| \cdot \|B'M\|} = -\cos(\pi/2 - \delta_s). \quad (1)$$

Par conséquent, l'équation recherchée est :

$$(\vec{OB}' \cdot B'M)^2 = \|\vec{OB}'\|^2 \|B'M\|^2 \cos^2(\pi/2 - \delta_s). \quad (2)$$

La longueur  $\|\vec{OB}'\|$  est notée  $L_s$ , et on définit le vecteur directeur du style  $\vec{a}$  tel que  $\vec{OB}' = L_s \vec{a}$ . On introduit aussi  $H$  le projeté perpendiculaire de  $B'$  sur la table du cadran.  $\vec{HB}'$  est appelé style droit et  $\vec{OH}$  sous-style. On peut développer l'équation (2) en remplaçant  $B'M$  par  $\vec{OM} - \vec{OB}'$ , et on obtient finalement

$$L_s^2 \cos^2 \delta_s + \vec{a} \cdot \vec{OM} (\vec{a} \cdot \vec{OM} - 2L_s \cos^2 \delta_s) - \sin^2 \delta_s \|\vec{OM}\|^2 = 0. \quad (3)$$

Dans le cas particulier de la déclinaison nulle, l'équation (2) se simplifie (le second membre de l'égalité est nul) pour donner

$$\vec{a} \cdot B'M = 0. \quad (4)$$

Le lieu de  $M$  est donc le plan perpendiculaire au style, passant par son extrémité. Comme  $M$  appartient également à la table du cadran, on en conclut que  $M$  se situe à l'intersection de ces deux plans, qui est une droite (à l'exception du cas particulier du cadran équatorial où la table du cadran est perpendiculaire au style, dans ce cas l'ombre du style est projetée à l'infini). Nous obtenons ainsi le premier résultat important, qui est que **les jours d'équinoxe, quelles que soient l'orientation et l'inclinaison de la table du cadran solaire, l'ombre de l'extrémité du style parcourt une droite.**

### 3 Cadran horizontal

#### 3.1 Cas général

On choisit comme axe  $\vec{x}$  le méridien local et comme sens positif la direction vers laquelle pointe le style, donc le nord. Le vecteur  $\vec{OB}'$  représentant le style s'écrit

$$\vec{OB}' = L_s \begin{pmatrix} \cos \phi \\ 0 \\ \sin \phi \end{pmatrix}. \quad (5)$$

On considère un point  $M$  de la ligne de déclinaison (ses coordonnées sont  $(x, y, 0)$  car  $M$  est dans le plan  $z = 0$ ). En substituant ces données dans l'équation (3) on obtient

$$x^2(\cos^2 \phi - \sin^2 \delta_s) - y^2 \sin^2 \delta_s - 2L_s x \cos \phi \cos^2 \delta_s + L_s^2 \cos^2 \delta_s = 0. \quad (6)$$

Selon le signe du produit des coefficients des termes  $x^2$  et  $y^2$  (cf. annexe A), plusieurs types de courbes peuvent être obtenus :

- pour des latitudes où le Soleil se couche tous les jours de l'année, on a  $\cos^2 \phi - \sin^2 \delta_s = \cos^2 \delta_s - \sin^2 \phi > 0$ , il s'agit de l'équation d'une hyperbole.
- si l'on se trouve à une latitude où le Soleil ne se couche pas un jour de déclinaison  $\delta_s$ , alors  $\cos^2 \delta_s - \sin^2 \phi < 0$ , et l'équation (6) est alors celle d'une ellipse.
- dans le cas très particulier où  $\cos^2 \delta_s = \sin^2 \phi$ , on a alors une parabole :

$$-y^2 \tan^2 \delta_s - 2xL_s \cos \phi + L_s^2 = 0. \quad (7)$$

- Pour  $\delta_s = 0$  (jour d'équinoxe), alors l'équation (4) nous fournit

$$x \cos \phi = L_s, \quad (8)$$

ce qui est l'équation d'une droite, comme on l'a déjà vu.

- Enfin, si  $\phi = \pm\pi/2$  (Pôle Nord ou Pôle Sud), on obtient un cercle :

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{\tan^2 \delta_s} L_s^2. \quad (9)$$

#### 3.2 Le cadran horizontal à l'équateur

Dans ce cas particulier, le style est parallèle à la table, et même dans le plan de la table, il faut donc le «détacher». Pour ce faire, on va étudier l'ombre de l'extrémité du style dans le plan  $z = -\alpha$ , ce qui conduit à l'équation

$$(x - L_s)^2 - y^2 \tan^2 \delta_s = \alpha^2 \tan^2 \delta_s, \quad (10)$$

qui est celle d'une hyperbole.

Le style étant parallèle à la table, on peut faire tendre sa longueur vers 0 et le remplacer par une tige plantée verticalement dans le sol, de longueur  $\alpha$ . L'équation de l'ombre du sommet de la tige sera

$$x = -\tan \delta_s \sqrt{y^2 + \alpha^2}. \quad (11)$$

### 3.3 Le cadran incliné

Si l'on incline la table d'un angle  $i$  ( $i < 0$  pour la table orientée vers le nord,  $i > 0$  pour la table orientée vers le sud, conformément à la notation choisie dans [3]), on se ramène au cas du cadran horizontal à la latitude  $\phi - i$ . Dans le cas particulier où  $i = \phi - \pi/2$ , on obtient un cadran équatorial, la table est parallèle au plan de l'équateur, on est dans la situation du cadran horizontal au Pôle Nord, et les lignes de déclinaison sont des cercles.

On peut choisir l'inclinaison  $i$  de manière à avoir comme lignes de déclinaison des hyperboles (cas où  $\cos^2 \delta_s - \sin^2(\phi - i) > 0$ ), mais on peut aussi choisir  $i$  de manière à avoir des ellipses (il suffit pour cela de vérifier que pour certaines dates,  $\cos^2 \delta_s - \sin^2(\phi - i) < 0$ , soit encore pour l'hémisphère nord  $-i > \pi/2 - \delta_s - \phi$ ) et une parabole, ainsi bien sûr qu'une droite pour les équinoxes.

En choisissant  $i = \pi/2$ , on obtient même le cadran vertical méridional. Le cadran vertical est cependant étudié à part entière dans la section 4 car il est à l'origine du cadran vertical déclinant étudié dans la section 5.

## 4 Cadran vertical

Nous distinguerons deux cas : le cadran septentrional (table face au nord) et le cadran méridional (table face au sud). Les systèmes de coordonnées choisis dans les deux cas sont présentés sur la figure 2. Ils ont comme caractéristiques d'avoir un axe  $\vec{z}$  vertical et un axe  $\vec{x}$  normal à la table du cadran.

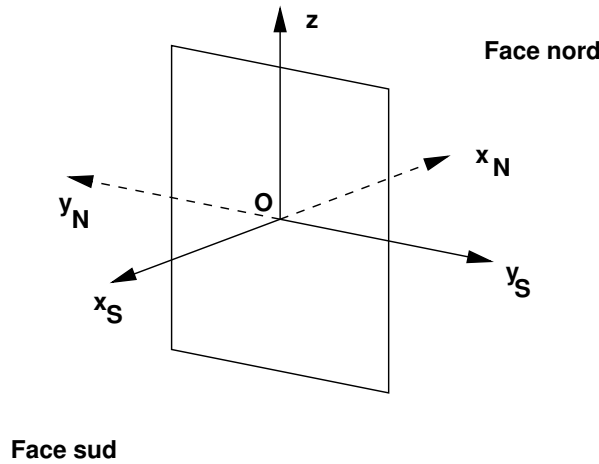


FIG. 2 – Cadrans verticaux et systèmes de coordonnées associés.

### 4.1 Cadran septentrional

Dans le repère  $(O, \vec{x}_N, \vec{y}_N, \vec{z})$  le style est représenté par le vecteur

$$\vec{OB}' = L_s \begin{pmatrix} \cos \phi \\ 0 \\ \sin \phi \end{pmatrix}. \quad (12)$$

$M$  appartient au plan  $x_N = 0$  donc

$$O\vec{M} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_N \\ z \end{pmatrix}. \quad (13)$$

L'équation (3) mène à

$$-y_N^2 \sin^2 \delta_s + z^2 (\sin^2 \phi - \sin^2 \delta_s) - 2zL_s \sin \phi \cos^2 \delta_s + L_s^2 \cos^2 \delta_s = 0. \quad (14)$$

Si  $\sin^2 \phi - \sin^2 \delta_s = \cos^2 \delta_s - \cos^2 \phi > 0$  (ce qui est toujours vérifié en dehors de la zone tropicale), il s'agit de l'équation d'une hyperbole. Si  $\cos^2 \delta_s - \cos^2 \phi < 0$  (certains jours de l'année dans la zone tropicale), on aura alors une ellipse, et si  $\cos^2 \delta_s - \cos^2 \phi = 0$  on aura une parabole.

Les jours d'équinoxe, l'ombre du sommet du style parcourt la droite d'équation

$$z \sin \phi = L_s. \quad (15)$$

## 4.2 Cadran méridional

Cette fois la table du cadran est plein sud, par conséquent on utilise le repère  $(O, \vec{x}_S, \vec{y}_S, \vec{z})$ , dans lequel le style est représenté par

$$O\vec{B}' = L_s \begin{pmatrix} \cos \phi \\ 0 \\ -\sin \phi \end{pmatrix}, \quad (16)$$

et  $O\vec{M} = L_s \begin{pmatrix} 0 \\ y_S \\ z \end{pmatrix}$ , d'où

$$-y_S^2 \sin^2 \delta_s + z^2 (\sin^2 \phi - \sin^2 \delta_s) + 2zL_s \sin \phi \cos^2 \delta_s + L_s^2 \cos^2 \delta_s = 0, \quad (17)$$

et l'on peut tirer des conclusions identiques à celles obtenues pour le cadran vertical septentrional. Les jours d'équinoxe, l'ombre du somme du style parcourt une droite d'équation

$$z \sin \phi = -L_s. \quad (18)$$

Il est important de noter que le cadran méridional est utilisable toute l'année (dans l'hémisphère nord), alors que le cadran septentrional ne fonctionne que de l'équinoxe de printemps à l'équinoxe d'automne, tôt le matin et tard le soir (toujours dans l'hémisphère nord).

## 5 Cadran vertical déclinant

On part du cadran vertical méridional, et on tourne la table d'un angle  $\Delta$  autour de l'axe  $\vec{z}$ . On choisira la convention  $\Delta < 0$  pour une orientation vers l'Est, et  $\Delta > 0$  pour une orientation vers l'Ouest. Le système de coordonnées associé au cadran déclinant est décrit sur la figure 3.

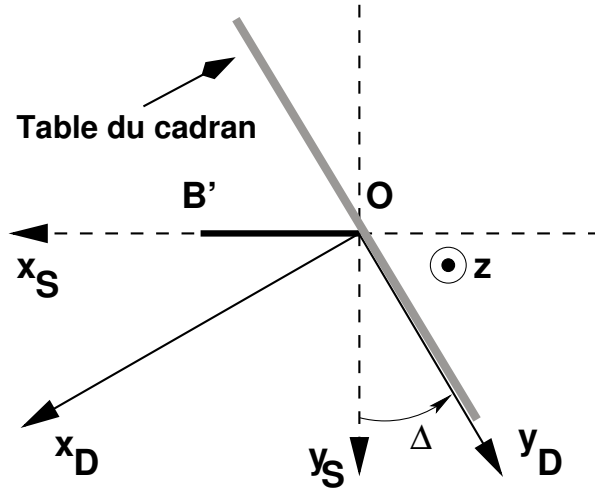


FIG. 3 – Cadran vertical déclinant.

### 5.1 Cas général

Dans le repère  $(O, \vec{x}_D, \vec{y}_D, \vec{z})$  le style est représenté par

$$O\vec{B}' = L_s \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \Delta \\ \cos \phi \sin \Delta \\ -\sin \phi \end{pmatrix}, \quad (19)$$

et  $M$  appartient au plan du cadran d'équation  $x_D = 0$ , d'où  $O\vec{M} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_D \\ z \end{pmatrix}$  et donc

$$\begin{aligned} & -y_D^2(\sin^2 \delta_s - \cos^2 \phi \sin^2 \Delta) + z^2(\sin^2 \phi - \sin^2 \delta_s) \\ & + -2y_D L_s \cos \phi \cos^2 \delta_s \sin \Delta + 2z L_s \sin \phi \cos^2 \delta_s - 2y_D z \cos \phi \sin \phi \sin \Delta \\ & + L_s^2 \cos^2 \delta_s \\ & = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Pour la déclinaison nulle, on trouve

$$y_D \cos \phi \sin \Delta - z \sin \phi = L_s, \quad (21)$$

et en reformulant cette équation sous la forme

$$z = y_D \frac{\sin \Delta}{\tan \phi} - \frac{L_s}{\sin \phi}, \quad (22)$$

on vérifie qu'on a bien le même résultat que celui publié par O. Tomas [3].

À l'aide d'une rotation du système de coordonnées, on peut faire disparaître le terme  $yz$  de l'équation (20) (cf. appendice A). L'angle de rotation est déterminé par l'équation

$$\frac{1}{\tan 2\theta} = \frac{\sin^2 \phi - \cos^2 \phi \sin^2 \Delta}{2 \cos \phi \sin \phi \sin \Delta} = \frac{\tan^2 \phi - \sin^2 \Delta}{2 \tan \phi \sin \Delta}, \quad (23)$$

soit encore

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \phi \sin \Delta}{\tan^2 \phi - \sin^2 \Delta} = \frac{2 \sin \Delta / \tan \phi}{1 - \sin^2 \Delta / \tan^2 \phi}. \quad (24)$$

Or on sait que

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}, \quad (25)$$

donc en on déduit que l'angle de rotation  $\theta$  est défini par

$$\tan \theta = \frac{\sin \Delta}{\tan \phi}, \quad (26)$$

ce qui correspond à la pente de la droite décrite par l'équation (22), ainsi qu'à l'angle que fait la sous-stylaire avec la ligne de midi [4]. À l'époque de Bedos de Celles, l'équation (26) s'exprimait ainsi [5] : «Le sinus total est au sinus de la déclinaison du plan, comme la tangente du complément de la hauteur du pôle sur l'horizon du lieu est à la tangente de l'angle compris entre la Méridienne et la soustylaire».

Dans le nouveau repère on a alors

$$a'y'^2 + c'z'^2 + 2d'y' + 2f'z' + g' = 0, \quad (27)$$

avec

$$a' = -\sin^2 \delta_s, \quad (28a)$$

$$c' = \cos^2 \delta_s - \cos^2 \phi \cos^2 \Delta, \quad (28b)$$

$$d' = 0, \quad (28c)$$

$$f' = L_s \cos \phi \cos^2 \delta_s \sqrt{\tan^2 \phi + \sin^2 \Delta}, \quad (28d)$$

$$g' = L_s^2 \cos^2 \delta_s. \quad (28e)$$

Ceci est une hyperbole si  $a'$  et  $c'$  sont de signe opposé, donc si  $c'$  est positif, soit encore si

$$\frac{\cos^2 \delta_s}{\cos^2 \phi} > \cos^2 \Delta, \quad (29)$$

ce qui est toujours vrai en dehors de la zone entre les tropiques ( $|\phi| > |\delta_s|$ ).

Par contre, dans la zone tropicale, on peut toujours trouver un mur tel que  $\cos^2 \delta_s / \cos^2 \phi < \cos^2 \Delta$ , et on pourra avoir des ellipses comme lignes de déclinaison. Celles-ci ne seront bien sûr pas complètes, puisque lorsque le Soleil est couché, il n'y a pas d'ombre.

Ainsi sur la figure 4, nous présentons deux exemples de cadrans verticaux déclinants. Le cadran de la figure 4(b) montre une ligne de déclinaison elliptique dans son coin supérieur droit.

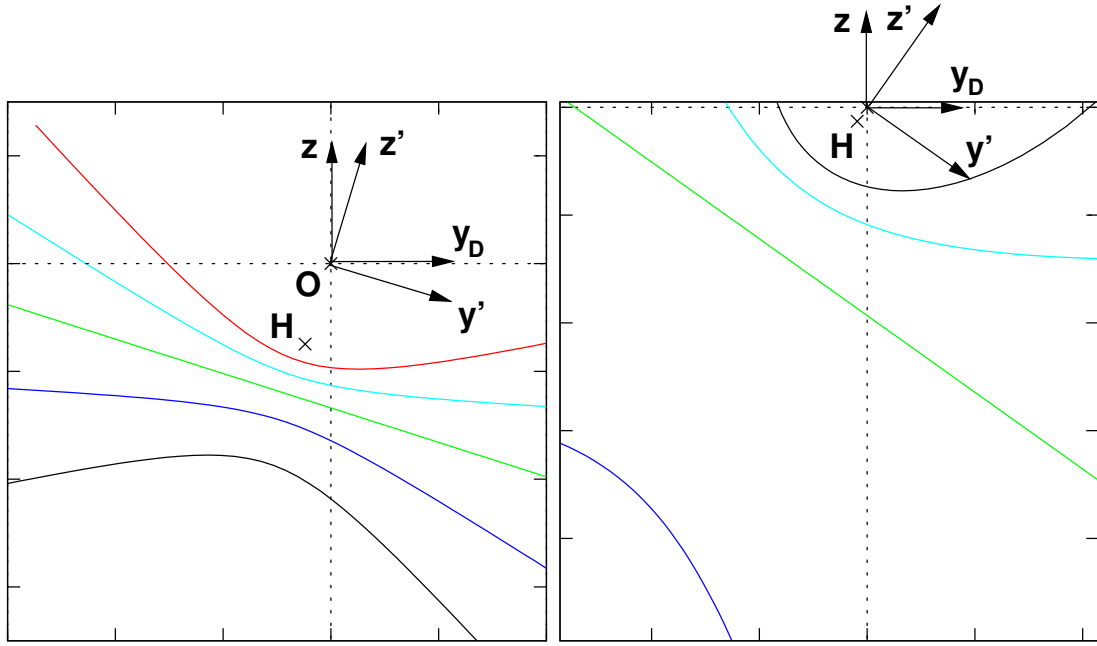
## 5.2 Cas particuliers : le cadran oriental et le cadran occidental

Dans le cas particulier  $\Delta = \pm\pi/2$  (table face à l'Est pour  $\Delta = -\pi/2$ , face à l'Ouest pour  $\Delta = +\pi/2$ ), alors

$$c' = \cos^2 \delta_s, \quad (30a)$$

$$f' = L_s \cos^2 \delta_s, \quad (30b)$$

$$\tan \theta = \pm \frac{1}{\tan \phi}. \quad (30c)$$



(a) Cadran vertical de déclinaison  $-30^\circ$  Est pour la latitude  $\phi = 48^\circ$  Nord. (b) Cadran vertical de déclinaison  $-11^\circ$  Est pour la latitude  $\phi = 15^\circ$  Nord.

FIG. 4 – Exemples de cadrans solaires verticaux déclinants. Lignes calculées pour les déclinaisons  $\delta_s = \pm 23.44^\circ$ ,  $\delta_s = \pm 11.725^\circ$  et  $\delta_s = 0^\circ$ .

Dans ce cas, le style est dans le plan où l'on veut observer l'ombre (comme on l'a déjà vu dans la partie 3.2). Pour cette raison, les cadrans orientaux ou occidentaux ont un style parallèle à la table, ce qui pour nos calculs revient à étudier l'ombre du style non plus dans le plan  $x = 0$  mais  $x = \pm\alpha$ , ce qui a pour effet de faire apparaître un terme  $\sin^2 \delta_s \alpha^2$  dans le membre de droite de l'égalité (20). Après changement de repère, on obtient :

$$(z' + L_s)^2 - y'^2 \tan^2 \delta_s = \alpha^2 \tan^2 \delta_s. \quad (31)$$

Le style étant parallèle à la table, on peut faire tendre sa longueur vers 0, et le remplacer par une tige de longueur  $\alpha$  perpendiculaire à cette même table, et c'est l'ombre du sommet de cette tige qui indique l'heure. Dans ces conditions, la trajectoire de l'ombre se simplifie pour donner (cas du cadran oriental) :

$$z' = -\tan \delta_s \sqrt{y'^2 + \alpha^2}. \quad (32)$$

L'analogie entre le cas du cadran vertical oriental et du cadran horizontal à l'équateur est évidente pour des raisons géométriques : à partir du moment où le style est parallèle à la table, peu importe la latitude ou le type de cadran.

### 5.2.1 Vérification de l'azimut de lever

Lorsque le Soleil se lève, son ombre se situe sur l'axe  $\vec{y}_D$  (à l'intersection de la courbe de déclinaison et de cet axe, voir la figure 6). La distance entre ce point et l'origine vaut  $l = \alpha \tan A_c$ , avec  $A_c = \pi/2 + A$  où  $A$  désigne l'azimut du soleil (pris négatif à cette heure du lever du soleil). L'angle  $A_c$  est positif pour un lever d'automne et d'hiver (cas de la figure 6), et négatif pour un lever de printemps ou d'été. Par ailleurs, on voit que pour ce point  $z' = l \cos \phi = \alpha \tan A_c \cos \phi$  et  $y' = l \sin \phi = \alpha \tan A_c \sin \phi$ . En remplaçant dans l'équation (32)



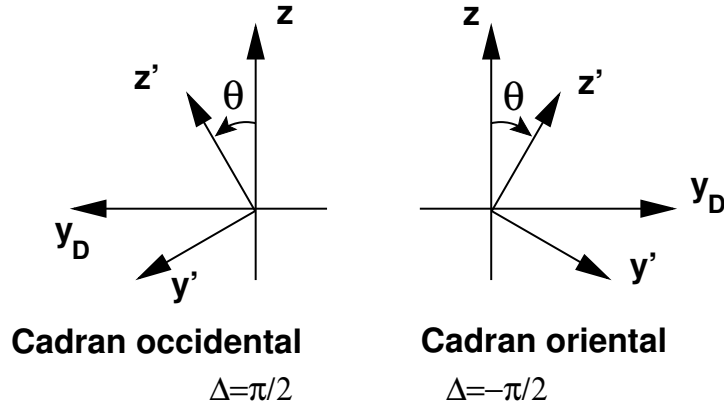


FIG. 5 – Disposition des repères pour le cadran occidental et oriental.

puis en élevant au carré on obtient

$$\tan^2 A_c = \frac{\tan^2 \delta_s}{\cos^2 \phi - \sin^2 \phi \tan^2 \delta_s}. \quad (33)$$

Sachant que  $\sin^2 x = \tan^2 x / (1 + \tan^2 x)$ , on en déduit (le calcul est précisé dans l'annexe C)

$$\sin A_c = -\frac{\sin \delta_s}{\cos \phi}. \quad (34)$$

Avec  $A_c = \pi/2 + A$ , on trouve donc en définitive

$$\cos A = -\frac{\sin \delta_s}{\cos \phi}, \quad (35)$$

qui est bien le résultat attendu [6].

### 5.2.2 Vérification de l'angle de lever par rapport à l'horizon

D'après l'équation (32), on sait que

$$\frac{dz'}{dy'} = -\tan \delta_s \frac{1}{2} \frac{2y'}{\sqrt{\alpha^2 + y'^2}} = -\tan \delta_s y' \frac{-\tan \delta_s}{z'} = \tan^2 \delta_s \frac{y'}{z'}, \quad (36)$$

or on a vu dans la section 5.2.1 qu'au moment du lever  $y'/z' = \tan \phi$ , par conséquent à ce moment là

$$\frac{dz'}{dy'} = \tan^2 \delta_s \tan \phi. \quad (37)$$

À l'aide de la matrice de rotation décrite dans l'annexe A, on peut donc calculer sur la table du cadran la pente de la courbe de déclinaison (ou plus précisément de sa tangente) au lever du Soleil dans le plan  $(y_D O z)$ , à savoir

$$\frac{dz}{dy_D} = \tan \theta_0^{ombre} = \frac{\sin^2 \phi - \cos^2 \delta_s}{\sin \phi \cos \phi}. \quad (38)$$

Cependant, pour déterminer l'angle que fait la trajectoire journalière du Soleil avec l'horizon au lever, c'est la quantité  $dz/dy''$  qu'il faut évaluer, où  $y''$  est mesuré sur l'axe horizontal perpendiculaire au rayon du Soleil passant par l'extrémité du style (figure 6). En effet, la trajectoire

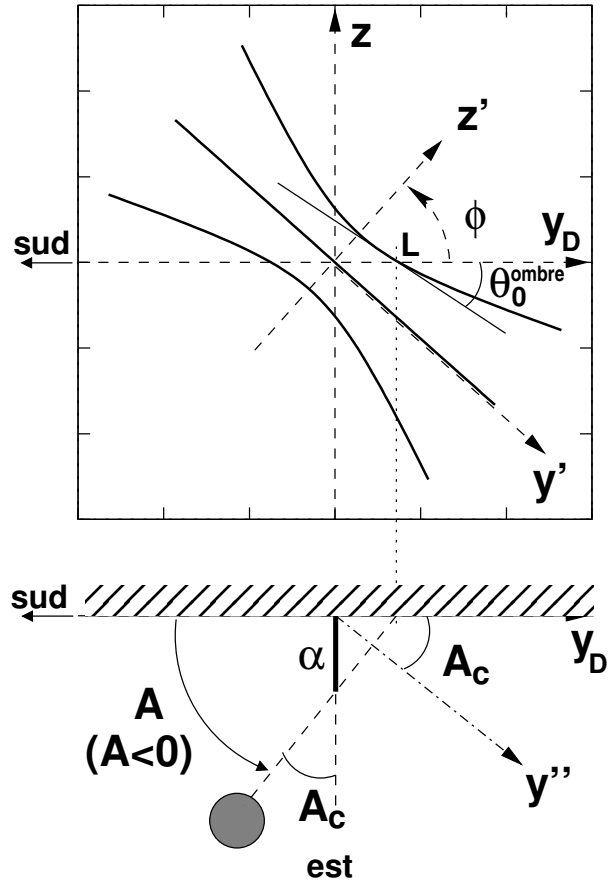


FIG. 6 – Cadran oriental : vue de face et vue de dessus. Le point  $L$  représente l'ombre de l'extrémité du style au lever du soleil un jour d'automne ou d'hiver ( $\delta_s < 0$ ).

du Soleil au lever est contenue localement dans le plan vertical tangent en  $L$  au cercle horizon dont le centre peut être placé à l'extrémité du style. Sachant que  $y'' = y_D \cos A_c$  et que le Soleil monte lorsque son ombre descend, on en déduit

$$\begin{aligned}
 \tan \theta_0^{\text{Soleil}} &= -\frac{1}{\cos A_c} \tan \theta_0^{\text{ombre}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \delta_s / \cos^2 \phi}} \frac{\sin^2 \phi - \cos^2 \delta_s}{\sin \phi \cos \phi} \\
 &= -\frac{\cos \phi}{\sqrt{\cos^2 \phi - \sin^2 \delta_s}} \frac{\sin^2 \phi - \cos^2 \delta_s}{\sin \phi \cos \phi} \\
 &= \frac{\sqrt{\cos^2 \delta_s - \sin^2 \phi}}{\sin \phi}.
 \end{aligned} \tag{39}$$

En utilisant la relation  $\cos^2 x = 1/(1 + \tan^2 x)$ , on trouve enfin

$$\cos \theta_0^{\text{Soleil}} = \frac{\sin \phi}{\cos \delta_s}, \tag{40}$$

qui est le résultat déjà obtenu par ailleurs [6].

## 6 Cadran déclinant incliné

On part toujours du cadran vertical méridional déclinant, et on l'incline (conformément à [3]), ce qui conduit à prendre pour système de coordonnées le repère  $(0, \vec{x}_{DI}, \vec{y}_{DI}, \vec{z}_{DI})$  avec

$\vec{z}_{DI}$  la ligne de plus grande pente ascendante (figure 7). On peut montrer que les coordonnées du vecteur  $O\vec{B}'$  dans ce nouveau repère sont alors

$$O\vec{B}'_{DI} = (P_y)^{-1} \cdot (P_z)^{-1} \cdot O\vec{B}' = L_s \begin{pmatrix} \cos \Delta \sin i \cos \phi - \cos i \sin \phi \\ \sin \Delta \cos \phi \\ -\sin i \sin \phi - \cos \Delta \cos i \cos \phi \end{pmatrix} \quad (41)$$

(les matrices de changement de base utilisées sont détaillées dans l'annexe B).

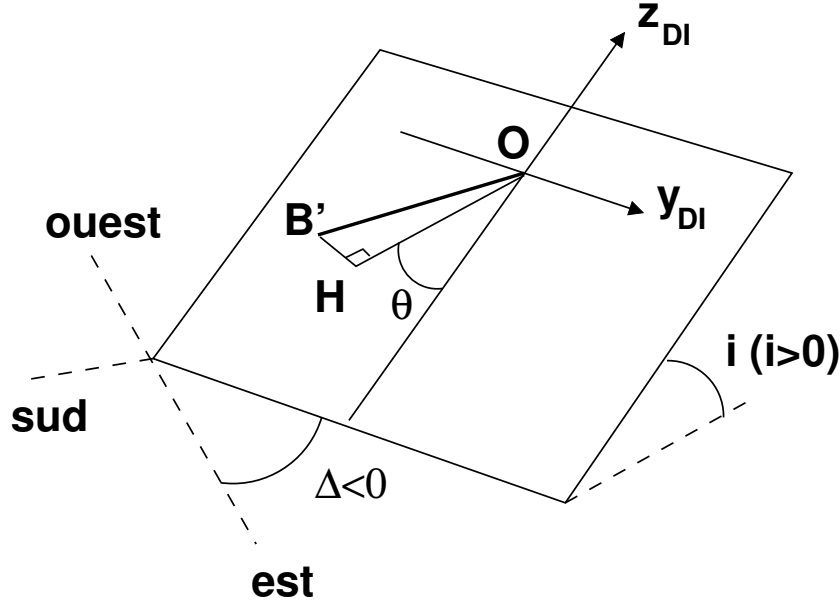


FIG. 7 – Cadran déclinant incliné (d'après la figure 16b de [3]).

Le point  $B'$  doit avoir sa coordonnée  $x$  positive dans le nouveau repère, sinon il n'est pas du côté de la face visible du cadran. Si cette composante est négative, alors il faut retourner le style, ce qui revient tout simplement à transformer  $O\vec{B}'$  en  $-O\vec{B}'$ . Pour cette raison on définit  $A = \cos \Delta \sin i \cos \phi - \cos i \sin \phi$  et on introduit  $\kappa$  tel que  $\kappa = 1$  si  $A > 0$  et  $\kappa = -1$  si  $A < 0$  (encore une fois, la notation est identique à celle de [3]). En multipliant  $O\vec{B}'$  par  $\kappa$ , on est sûr de toujours avoir un style droit de mesure algébrique  $\overline{HB'} = \kappa O\vec{B}' \cdot \vec{x}_{DI}$  positive et donc le style sur la bonne face du cadran.

L'équation générale obtenue est

$$\begin{aligned} & y_{DI}^2 (\cos^2 \phi \sin^2 \Delta - \sin^2 \delta_s) + z_{DI}^2 (\zeta^2 - \sin^2 \delta_s) \\ & + -2\kappa y_{DI} L_s \cos \phi \sin \Delta \cos^2 \delta_s + 2\kappa z_{DI} L_s \zeta \cos^2 \delta_s - 2y_{DI} z_{DI} \zeta \cos \phi \sin \Delta \\ & + L_s^2 \cos^2 \delta_s \\ & = 0, \end{aligned} \quad (42)$$

avec

$$\zeta = \cos \phi \cos \Delta \cos i + \sin \phi \sin i. \quad (43)$$

Pour  $\delta_s = 0$ , on obtient l'équation

$$\kappa (y_{DI} \cos \phi \sin \Delta - z_{DI} \zeta) = L_s, \quad (44)$$

donc l'ombre parcourt la droite définie par

$$z_{DI} = \frac{1}{\cos \phi \cos \Delta \cos i + \sin \phi \sin i} (y_{DI} \cos \phi \sin \Delta - \kappa L_s), \quad (45)$$

qui est bien le résultat trouvé dans la référence [3] (avec  $\kappa = 1$ ).

Comme pour le cas du cadran vertical déclinant de la section 5, on peut trouver un système de coordonnées permettant de s'affranchir du terme croisé dans l'équation (42). L'angle de rotation est donné par la relation

$$\tan \theta = \frac{\cos \phi \sin \Delta}{\cos \phi \cos \Delta \cos i + \sin \phi \sin i} = \frac{\sin \Delta}{\cos \Delta \cos i + \tan \phi \sin i}, \quad (46)$$

ce qui est en accord avec la pente de la droite définie par l'équation (45) : cet angle  $\theta$  correspond donc à l'angle que fait la ligne des équinoxes avec l'axe horizontal ( $Oy_{DI}$ ), ainsi qu'à l'angle (noté  $\omega$  dans [3]) que fait la sous-styloire  $\vec{OH}$  avec la ligne de plus grande pente ( $Oz_{DI}$ ).

Dans le nouveau système de coordonnées, on peut écrire l'équation de la trajectoire de l'ombre sous la forme  $a'y'^2 + c'z'^2 + d'y' + f'z' + g' = 0$ , avec

$$a' = -\sin^2 \delta_s, \quad (47a)$$

$$c' = \zeta^2 + \cos^2 \phi \sin^2 \Delta - \sin^2 \delta_s, \quad (47b)$$

$$d' = 0, \quad (47c)$$

$$f' = \kappa L_s \cos^2 \delta_s \sqrt{\zeta^2 + \cos^2 \phi \sin^2 \Delta}, \quad (47d)$$

$$g' = L_s^2 \cos^2 \delta_s \quad (47e)$$

(on peut vérifier que pour  $i = \pi/2$ , on retrouve bien le résultat du cadran vertical méridional).

Ceci est une hyperbole si  $a'$  et  $c'$  sont de signe opposé, donc si

$$\zeta^2 + \cos^2 \phi \sin^2 \Delta - \sin^2 \delta_s > 0. \quad (48)$$

## 7 Tableaux récapitulatifs et réflexion complémentaire

Nous résumons dans les tableaux 1, 2 et 3 les différents cas étudiés.

	Horizontal	Horizontal incliné ( $i$ )
Hyperbole	$\cos^2 \delta_s - \sin^2 \phi > 0$	$\cos^2 \delta_s - \sin^2(\phi - i) > 0$
Parabole	$\cos^2 \delta_s - \sin^2 \phi = 0$	$\cos^2 \delta_s - \sin^2(\phi - i) = 0$
Ellipse	$\cos^2 \delta_s - \sin^2 \phi < 0$	$\cos^2 \delta_s - \sin^2(\phi - i) < 0$
Cercle	$\phi = \pm \pi/2$	$i = \phi - \pi/2$
Droite	$\delta_s = 0$	$\delta_s = 0$

TAB. 1 – Lignes de déclinaison d'un cadran horizontal et horizontal incliné.

	Vertical	Vertical déclinant ( $\Delta$ )
Hyperbole	$\cos^2 \delta_s - \cos^2 \phi > 0$	$\cos^2 \delta_s - \cos^2 \phi \cos^2 \Delta > 0$
Parabole	$\cos^2 \delta_s - \cos^2 \phi = 0$	$\cos^2 \delta_s - \cos^2 \phi \cos^2 \Delta = 0$
Ellipse	$\cos^2 \delta_s - \cos^2 \phi < 0$	$\cos^2 \delta_s - \cos^2 \phi \cos^2 \Delta < 0$
Cercle	$\phi = 0$	$\phi = 0, \Delta = 0(+\pi)$
Droite	$\delta_s = 0$	$\delta_s = 0$

TAB. 2 – Lignes de déclinaison d'un cadran vertical et vertical déclinant.

	Déclinant incliné
Hyperbole	$\zeta^2 + \cos^2 \phi \sin^2 \Delta - \sin^2 \delta_s > 0$
Parabole	$\zeta^2 + \cos^2 \phi \sin^2 \Delta - \sin^2 \delta_s = 0$
Ellipse	$\zeta^2 + \cos^2 \phi \sin^2 \Delta - \sin^2 \delta_s < 0$
Cercle	$\Delta = 0, i = \phi - \pi/2$
Droite	$\delta_s = 0$

TAB. 3 – Lignes de déclinaison d’un cadran déclinant incliné, avec  $\zeta = \cos \phi \cos \Delta \cos i + \sin \phi \sin i$ .

Une étude attentive des tableaux 1 à 3 montre qu’il est relativement aisé de déterminer toutes les conditions à partir du seul cas du cadran vertical en effectuant des transformations minimales.

Ainsi, on s’aperçoit dans la table 2 qu’il suffit de convertir  $\cos \phi$  en  $\cos \phi \cos \Delta$  pour passer du cadran vertical au cadran vertical déclinant. Ce terme n’est autre que la valeur  $\vec{a} \cdot \vec{x}_D$  obtenue à partir des équations (16) ou (19), c’est-à-dire la composante hors plan de la table du vecteur directeur du style, soit encore (en multipliant par  $L_s$ ) la mesure algébrique du style droit. On peut donc effectuer la même opération avec l’équation (41), et il faut alors substituer  $\cos \Delta \sin i \cos \phi - \cos i \sin \phi$  à  $\cos \phi$  pour obtenir les relations de la table 3 (on vérifie aisément que  $\cos^2 \delta_s - (\cos \Delta \sin i \cos \phi - \cos i \sin \phi)^2 = \zeta^2 + \cos^2 \phi \sin^2 \Delta - \sin^2 \delta_s$ ).

De même, l’angle dont il faut tourner le système d’axe pour s’affranchir des termes croisés  $y_{DI}z_{DI}$  dans les équations des lignes de déclinaison s’obtient facilement avec la relation

$$\tan \theta = -\frac{\vec{OB}' \cdot \vec{y}_{DI}}{\vec{OB}' \cdot \vec{z}_{DI}}, \quad (49)$$

ce n’est autre que l’angle entre la sous-stylaire et la ligne de plus grande pente (confondue avec la ligne de midi sauf dans le cas du cadran déclinant incliné).

Pour résumer, on peut dire que :

- dans tous les cas, la nature de la ligne de déclinaison est donnée par le signe du terme test  $\cos^2 \delta_s - (\vec{a} \cdot \vec{x}_{DI})^2$ , c’est-à-dire par la comparaison de la longueur  $L_s \cos \delta_s$  avec la mesure algébrique du style droit  $\vec{HB}' = \vec{OB}' \cdot \vec{x}_{DI}$ ,
- l’angle de rotation  $\theta$  permettant d’éliminer les termes croisés  $y_{DI}z_{DI}$  est tel que

$$\tan \theta = \frac{\text{composante de la sous-stylaire sur la ligne horizontale}}{\text{composante de la sous-stylaire sur la ligne de plus grande pente}}. \quad (50)$$

Cette rotation correspond dans tous les cas à rendre l’axe ( $Oy'$ ) parallèle à la droite des équinoxes, et par conséquent, à le rendre perpendiculaire à la sous-stylaire.

## 8 Conclusion

Au cours de cet article, nous avons établi les critères permettant de déterminer quel type de courbe représente la ligne diurne pour une déclinaison donnée et un cadran d’orientation quelconque. Ceci est bien entendu insuffisant pour tracer un cadran, et le lecteur pourra par exemple se référer à deux articles très complets pour le tracé des lignes horaires [3, 7], ou encore à un ouvrage plus ancien [8], dans lequel une méthode très proche de celle présentée ici est utilisée pour la détermination des lignes horaires. Cependant, une personne désireuse d’obtenir un type de ligne de déclinaison particulier pour une date donnée (hyperbole, parabole, ellipse) trouvera une aide précieuse pour le choix de l’orientation de son cadran dans cet article.

## Références

- [1] René R. J. Rohr. *Sundials. History, Theory and Practice*. Dover Publications Inc., New York, 1970.
- [2] Alexandre Vial. Étude des lignes de déclinaison d'un cadran solaire horizontal. *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.*, 100(881) :169–180, février 2006.
- [3] Orlando TOMAS. Les cadrans solaires et l'astrolabe planisphérique sans l'usage de la trigonométrie sphérique. *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.*, 98(868(1)) :1523–1576, novembre 2004. <http://udppc.asso.fr/bupdoc/textes/fichierjoint/868/08681523.pdf>.
- [4] Albert E. Waugh. *Sundials : their theory and construction*, chapter 15 : Dial furniture. Dover Publications Inc., New York, 1973.
- [5] François Bedos de Celles. *La gnomonique pratique*. 1760.
- [6] Alexandre Vial. Quelques idées reçues sur la position du soleil. *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.*, 101(897) :959–980, octobre 2007.
- [7] Claude Garino. Les cadrans solaires : Leur calcul et leur construction. *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.*, 83(710) :35–68, janvier 1989. <http://udppc.asso.fr/bupdoc/textes/1989/07100035.PDF>.
- [8] Joseph Mollet. *Gnomonique analytique*. Bachelier, Paris, 4ème édition, 1837.

## A Coniques et changement de repère

L'expression la plus générale d'une conique dans le repère  $(xOy)$  est :

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2fy + g = 0. \quad (51)$$

Par un changement de repère adéquat, à savoir une rotation d'un angle  $\theta$  défini par

$$\cot 2\theta = \frac{a - c}{2b}, \quad (52)$$

on fait disparaître le terme croisé  $xy$  et on se ramène à une équation dans le nouveau repère  $(x'Oy')$  de la forme

$$a'x'^2 + c'y'^2 + 2d'x' + 2f'y' + g' = 0, \quad (53)$$

avec

$$a' = a \cos^2 \theta + 2b \cos \theta \sin \theta + c \sin^2 \theta, \quad (54a)$$

$$c' = a \sin^2 \theta - 2b \cos \theta \sin \theta + c \cos^2 \theta, \quad (54b)$$

$$d' = d \cos \theta + f \sin \theta, \quad (54c)$$

$$f' = -d \sin \theta + f \cos \theta, \quad (54d)$$

$$g' = g, \quad (54e)$$

et l'on réécrit (53) sous la forme

$$a' \left(x' + \frac{d'}{a'}\right)^2 + c' \left(y' + \frac{f'}{c'}\right)^2 = -g' + \frac{d'^2}{a'} + \frac{f'^2}{c'}. \quad (55)$$

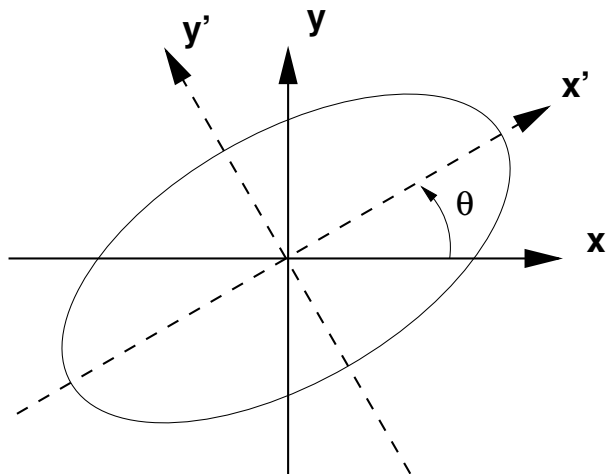


FIG. 8 – Conique et changement de repère

Après avoir calculé la courbe dans le repère  $(x'Oy')$ , on trouve les coordonnées de ses points dans le repère  $(xOy)$  à l'aide de la transformation

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}. \quad (56)$$

Plusieurs types de coniques peuvent être rencontrés :

- si  $b^2 - ac > 0$  ou  $-a'c' > 0$ , il s'agit d'une hyperbole,
- si  $b^2 - ac = 0$  ou  $a'c' = 0$ , il s'agit d'une parabole,
- si  $b^2 - ac < 0$  ou  $-a'c' < 0$ , il s'agit d'une ellipse.

## B Matrices de passage

Matrice de changement de base par rotation autour de  $\vec{z}$  (convention  $\Delta < 0$  pour une rotation dans le sens trigonométrique) :

$$P_z = \begin{pmatrix} \cos \Delta & \sin \Delta & 0 \\ -\sin \Delta & \cos \Delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (57)$$

Matrice de changement de base par rotation autour de  $\vec{y}$  :

$$P_y = \begin{pmatrix} \cos(\pi/2 - i) & 0 & -\sin(\pi/2 - i) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\pi/2 - i) & 0 & \cos(\pi/2 - i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin i & 0 & -\cos i \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos i & 0 & \sin i \end{pmatrix}. \quad (58)$$

## C Détails du calcul pour passer de l'équation (33) à (34)

Sachant que  $\sin^2 A_c = \tan^2 A_c / (1 + \tan^2 A_c)$ , en utilisant l'équation (33), on obtient

$$\sin^2 A_c = \frac{\tan^2 \delta_s}{\cos^2 \phi - \sin^2 \phi \tan^2 \delta_s + \tan^2 \delta_s} = \frac{\sin^2 \delta_s}{\cos^2 \delta_s \cos^2 \phi - \sin^2 \delta_s \sin^2 \phi + \sin^2 \delta_s}. \quad (59)$$

Les deux derniers termes du dénominateur se simplifient en  $\sin^2 \delta_s \cos^2 \phi$ , qui peut alors se simplifier avec le premier terme du dénominateur pour donner

$$\sin^2 A_c = \frac{\sin^2 \delta_s}{\cos^2 \phi}, \quad (60)$$

et donc pour finir

$$\sin A_c = -\frac{\sin \delta_s}{\cos \phi}, \quad (61)$$

le signe  $-$  provenant de la convention de signe choisie pour  $A_c$ .