

Étude des lignes de déclinaison d'un cadran solaire horizontal

Version originale : A. Vial, Bull. Un. Prof. Phys. Chim., 100(881):169-180, février 2006

Alexandre VIAL

Université de Technologie de Troyes

12, rue Marie Curie - BP 2060

10010 Troyes

alexandre.vial@utt.fr

Version corrigée du 16 avril 2006

Résumé

À partir du calcul de la position du Soleil dans le repère local horizontal, on démontre que sa trajectoire par rapport au style incliné d'un cadran horizontal définit un cône. L'équation de l'intersection de ce cône avec le plan du cadran est déterminée, et en fonction de la latitude du lieu et de la déclinaison du Soleil, on montre que les lignes de déclinaison (ou lignes diurnes) sont soit une droite, soit des hyperboles, des ellipses, ou une parabole.

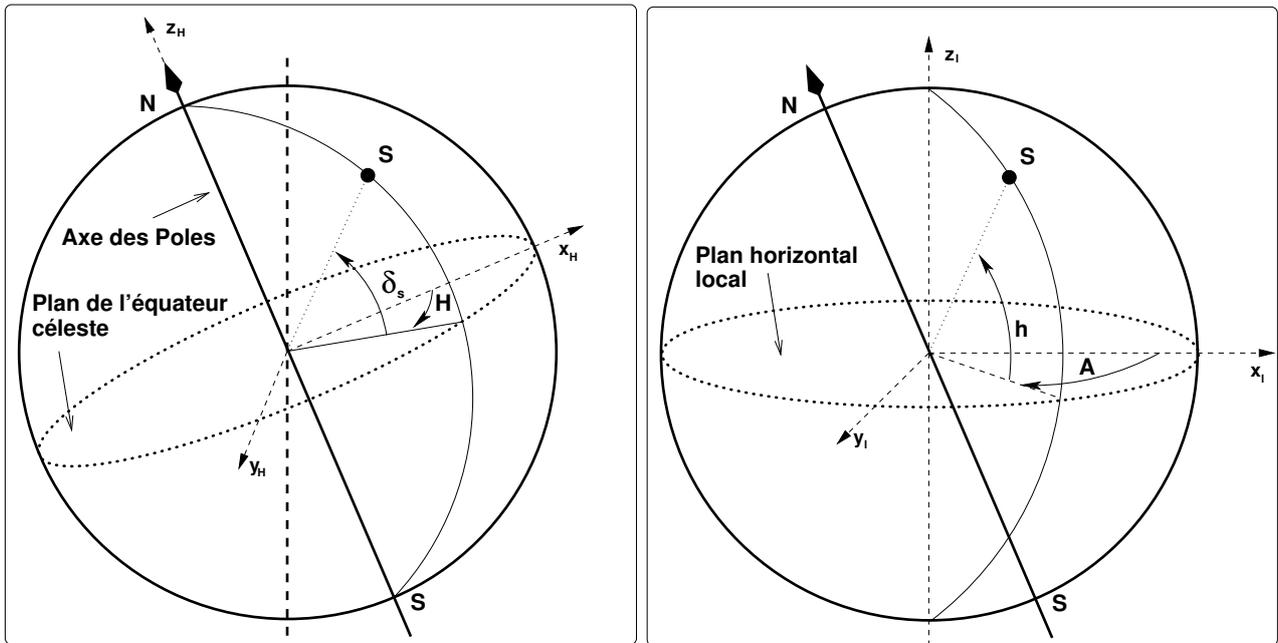
1 Introduction

Si les cadrans solaires ont à l'origine été développés pour déterminer l'heure en repérant la position de l'ombre d'un style par rapport aux lignes dites horaires, la plupart d'entre eux incluent des lignes de déclinaison (ou lignes journalières) permettant de déterminer la date. Ces lignes sont généralement tracées en utilisant les équations paramétriques donnant la longueur de l'ombre en fonction de l'angle horaire ou celles donnant les coordonnées de l'extrémité de l'ombre comme récemment publié [1], et ne sont finalement qu'une conséquence du calcul de la longueur de l'ombre du style.

Dans cet article, les équations cartésiennes des lignes de déclinaison sont déterminées. À partir de ces équations, la forme de ces lignes est discutée en fonction de la déclinaison et de la latitude du lieu considéré.

2 Calcul de la position du Soleil

La Terre tourne autour du Soleil, mais bien sûr vu de la Terre, on dirait plutôt que c'est le Soleil qui tourne autour de la Terre. Pour cette raison, on cherche à exprimer la position du Soleil par rapport à un repère local.



(a) Repère équatorial local

(b) Repère local horizontal

FIG. 1 – Position du Soleil dans différents systèmes de coordonnées (d'après [2]).

2.1 Position dans le repère équatorial absolu

Dans le repère équatorial absolu, la position du Soleil est repérée par l'ascension droite et la déclinaison, qui correspondent respectivement à l'angle que fait la projection du Soleil sur l'équateur céleste avec le point vernal, et à l'angle entre le Soleil et l'équateur céleste. L'ascension droite s'exprime en heures, minutes et secondes, alors que la déclinaison s'exprime en degrés.

On rappelle que l'inclinaison de l'axe de la Terre par rapport au plan de l'écliptique (obliquité) est $\epsilon = 23^{\circ}27' = 23,45^{\circ}$ et que la déclinaison δ_s vérifie $-\epsilon < \delta_s < \epsilon$.

2.2 Position dans le repère équatorial local

Dans le repère équatorial local ayant pour plan de référence le plan de l'équateur céleste et pour grand cercle origine le méridien local, la déclinaison du Soleil est la même que dans le repère équatorial absolu [2], mais la longitude du Soleil sera comptée à partir du méridien local. Elle sera appelée «angle horaire» et notée H (figure 1(a)). La position du Soleil s'écrit donc en fonction de H :

$$\begin{cases} x_H = \cos H \cos \delta_s \\ y_H = \sin H \cos \delta_s \\ z_H = \sin \delta_s \end{cases} \quad (1)$$

2.3 Position dans le repère local horizontal

Dans le repère local horizontal ayant pour plan de référence le plan de l'horizon local et pour grand cercle origine le méridien local, la position du Soleil telle qu'elle est perçue par

un observateur situé à la latitude ϕ et à la longitude λ_L est repérée par les angles appelés azimut et élévation (ou hauteur), respectivement notés A et h (figure 1(b)). On a donc :

$$\begin{cases} x_l = \cos h \cos A \\ y_l = \cos h \sin A \\ z_l = \sin h \end{cases} \quad (2)$$

Le plan horizontal local étant incliné de $-(\pi/2 - \phi)$ par rapport au plan équatorial, on obtient à l'aide d'une matrice de rotation (voir l'annexe A) une autre écriture de la position du Soleil :

$$\begin{cases} x_l = \sin \phi \cos \delta_s \cos H - \cos \phi \sin \delta_s \\ y_l = \cos \delta_s \sin H \\ z_l = \cos \phi \cos \delta_s \cos H + \sin \phi \sin \delta_s \end{cases} \quad (3)$$

et donc en combinant les équations (2) et (3) on obtient finalement :

$$\begin{cases} \cos h \cos A = \sin \phi \cos \delta_s \cos H - \cos \phi \sin \delta_s \\ \cos h \sin A = \cos \delta_s \sin H \\ \sin h = \cos \phi \cos \delta_s \cos H + \sin \phi \sin \delta_s \end{cases} \quad (4)$$

À midi vrai ($H = 0$, $A = 0$), on obtient

$$\begin{cases} \cos h = \sin(\phi - \delta_s) \\ \sin h = \cos(\phi - \delta_s) \end{cases} \quad (5)$$

3 Calcul de la position et de la longueur de l'ombre d'un style

Un cadran solaire horizontal comporte un style incliné de $\pi/2 - \phi$ par rapport à la verticale locale de sorte à ce qu'il soit parallèle à l'axe de rotation de la Terre. Il pointe donc en direction du Nord.

On va cependant étudier dans un premier temps le cas du style vertical, qui permet d'établir quelques relations utiles par la suite.

3.1 Étude du style vertical

Pour l'angle horaire H , la longueur $L' = \|\vec{OC}\|$ de l'ombre au sol d'un style vertical de longueur $L = \|\vec{OB}\|$ vérifie la relation (figure 2) :

$$\tan h = \frac{L}{L'} \Rightarrow L' = L \cdot \frac{1}{\tan h} \quad (6)$$

L'angle A que fait l'ombre avec le méridien local (l'azimut, donc) vérifie (facilement obtenu à partir de l'équation (4))

$$\tan A = \frac{\sin H}{\sin \phi \cos H - \cos \phi \tan \delta_s} \quad (7)$$

Cet angle dépend de H et ϕ bien sûr, mais également de δ_s .

La longueur L'_p de la projection de l'ombre du style sur le méridien local vaut

$$L'_p = \|\vec{OC}\| \cdot \cos A = L \frac{\cos A}{\tan h} \quad (8)$$

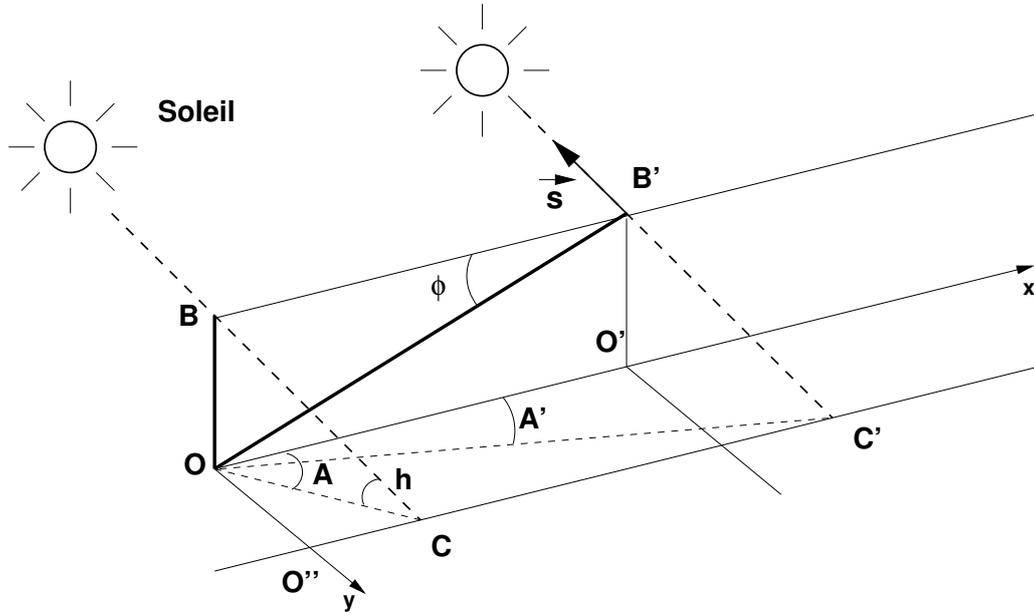


FIG. 2 – Ombres d'un style vertical et d'un style incliné de $\pi/2 - \phi$ par rapport à la verticale (d'après [3]).

Or lorsque $\delta_s = 0$ (équinoxes de printemps et d'automne), on a (d'après (4))

$$\cos A = \tan \phi \tan h \quad (9)$$

donc dans ce cas particulier, la longueur de la projection est une constante :

$$L'_{p(\delta_s=0)} = \|\vec{OC}\|. \cos A = L. \tan \phi \quad (10)$$

L'extrémité de l'ombre parcourt donc une droite perpendiculaire au méridien local.

3.2 Étude du style incliné

3.2.1 Longueur de l'ombre

On incline le style de manière à ce qu'il fasse un angle $\pi/2 - \phi$ avec la verticale. Il est alors parallèle à l'axe de rotation de la Terre. On note $L_s = \|\vec{OB'}\|$ la longueur du style incliné, définie par la relation

$$\frac{L}{L_s} = \sin \phi \Rightarrow L_s = L \frac{1}{\sin \phi} \quad (11)$$

Dans le triangle $(OO'C')$, on a $\frac{\sin(A - A')}{OO'} = \frac{\sin A'}{O'C'}$. Après un peu de calcul, on trouve la relation

$$\tan A' = \tan H \sin \phi \quad (12)$$

Dans le cas du style incliné, l'angle que fait l'ombre avec le méridien local en fonction de H ne dépend plus de la déclinaison δ_s , d'où l'intérêt de cette géométrie pour la construction d'un cadran solaire. La longueur $L'_s = \|\vec{OC'}\|$ de l'ombre peut se calculer assez facilement :

$$L'_s = \|\vec{OC'}\| = \|\vec{OO'} + \vec{O'C'}\| = \|\vec{OO'}\|^2 + \|\vec{O'C'}\|^2 + 2\vec{OO'} \cdot \vec{O'C'} \quad (13)$$

On trouve finalement puisque $O'\vec{C}' = O\vec{C}$:

$$L'_s = L \sqrt{\frac{1}{\tan^2 \phi} + \frac{1}{\tan^2 h} + 2 \frac{1}{\tan h} \frac{1}{\tan \phi} \cos A} \quad (14)$$

À midi vrai, la relation (14) se simplifie et la longueur de l'ombre devient

$$L'_s = L \left(\frac{1}{\tan h} + \frac{1}{\tan \phi} \right) \quad (15)$$

En utilisant les relations (5) et (11), on peut encore simplifier pour obtenir une relation entre la longueur de l'ombre et la longueur du style incliné à midi vrai :

$$L'_s = L_s \frac{\cos \delta_s}{\cos(\phi - \delta_s)} \quad (16)$$

3.2.2 Cas particulier de la déclinaison nulle

Si l'on regarde la longueur L'_{sp} de la projection de l'ombre sur le méridien local, on a cette fois

$$L'_{sp} = ||O'\vec{C}'|| \cdot \cos A' \quad (17)$$

Pour le cas particulier $\delta_s = 0$, on obtient après calcul la relation

$$L'_{sp(\delta_s=0)} = L \cdot \frac{1}{\sin \phi \cos \phi} \quad (18)$$

$L'_{sp(\delta_s=0)}$ est donc une constante et l'extrémité de l'ombre parcourt une droite perpendiculaire au méridien local. En fait cette propriété est évidente après le calcul du style droit et l'étude attentive de la figure 2, la valeur de la projection pouvant être calculée également très facilement si l'on appelle \vec{u} le vecteur unitaire porté par le méridien local et dirigé vers le Nord :

$$L'_{sp(\delta_s=0)} = O'\vec{C}' \cdot \vec{u} = (O\vec{C} + C\vec{C}') \cdot \vec{u} = O\vec{C} \cdot \vec{u} + C\vec{C}' \cdot \vec{u} \quad (19)$$

or le calcul de $O\vec{C} \cdot \vec{u}$ correspond à celui du style droit, et par construction $C\vec{C}' = O\vec{O}'$, on en déduit donc finalement

$$L'_{sp(\delta_s=0)} = L \cdot \left(\tan \phi + \frac{1}{\tan \phi} \right) = L \cdot \frac{1}{\sin \phi \cos \phi} \quad (20)$$

On peut constater que l'équation (20) est identique à (18) et est bien compatible avec l'équation (16).

3.2.3 Tracé d'un cadran solaire horizontal

Avec les formules qui précèdent, on est en mesure de dessiner un cadran solaire. Le cadran représenté sur la figure 3 a été calculé pour une latitude de 48,3° Nord. Les points notés O et O' correspondent aux points du même nom sur la figure 2. La courbe en huit visible sur la ligne du midi vrai est parfois appelée *analemme*. Elle est la conséquence de l'équation du temps. Les lignes de déclinaison pour les solstices et les équinoxes sont également visibles, et ont été ici calculées à partir de la formule (14).

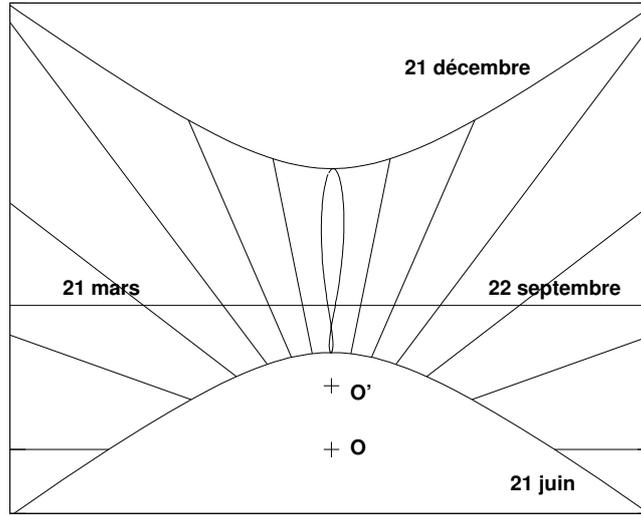


FIG. 3 – *Cadran solaire horizontal*

3.2.4 Ombre limite

En première approximation, on peut considérer que le Soleil se lève et se couche lorsque $h = 0$ (dans la pratique, il faut tenir compte du diamètre angulaire du Soleil et de la réfraction de l'atmosphère). Des équations (4), on déduit qu'à ce moment là, H doit vérifier la relation

$$\cos H = -\tan \phi \tan \delta_s \quad (21)$$

On montre qu'alors

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tan^2 A = \lim_{h \rightarrow 0} \tan^2 A' = \frac{\cos^2 \delta_s - \sin^2 \phi}{\sin^2 \delta_s} \quad (22)$$

Lorsque le Soleil se couche, son ombre suit donc une asymptote dont la pente est donnée par (22).

Il est cependant possible que le Soleil ne se lève jamais ou ne se couche jamais. En effet, $\sin h > 0$ implique par exemple $\phi > \pi/2 - \delta$. Au Pôle Nord ($\phi = \pi/2$), cette relation est vérifiée dès que $\delta > 0$, c'est-à-dire de l'équinoxe de printemps à l'équinoxe d'automne. De manière plus générale, pour des latitudes supérieures à $66^\circ 33'$ ou inférieures à $-66^\circ 33'$ (latitudes des cercles polaires), il existe un ou plusieurs jours où le Soleil ne se lève pas et où le Soleil ne se couche pas (plus on se rapproche des pôles, plus cette durée est longue).

4 Équations des lignes de déclinaison

À un jour donné de l'année correspond une valeur δ_s de la déclinaison. Pour une valeur de la déclinaison, l'extrémité de l'ombre du style suit une trajectoire bien précise. On a déjà vu précédemment que dans le cas particulier des équinoxes ($\delta_s = 0$), cette trajectoire était une droite.

On va noter \vec{s} le vecteur unitaire indiquant la position du Soleil, en choisissant comme axe \vec{x} le méridien local et comme sens positif la direction vers laquelle pointe le style, donc le Nord. D'après le système (3) \vec{s} a pour composantes dans ce nouveau repère

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} -x_l \\ -y_l \\ z_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\sin \phi \cos \delta_s \cos H - \cos \phi \sin \delta_s) \\ -(\cos \delta_s \sin H) \\ \cos \phi \cos \delta_s \cos H + \sin \phi \sin \delta_s \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Le vecteur \vec{OB}' représentant le style s'écrit quant à lui

$$\vec{OB}' = \begin{pmatrix} L_s \cos \phi \\ 0 \\ L_s \sin \phi \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Le produit scalaire de ces deux vecteurs donne

$$\vec{s} \cdot \vec{OB}' = L_s \sin \delta_s = L_s \cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta_s\right), \quad (25)$$

il s'agit donc d'une constante (pour un jour donné)! De cette dernière relation, on peut conclure que pour une déclinaison fixée, la surface balayée par le rayon vecteur \vec{s} au cours d'une journée définit un cône de révolution dont l'axe est le style incliné (en réalité, il s'agit plutôt de l'axe de rotation de la Terre, mais vu du Soleil, on peut considérer qu'ils sont confondus), dont le sommet est l'extrémité B' du style, et dont le demi-angle d'ouverture au sommet vaut $\pi/2 - \delta_s$ (figure 4). Cet angle peut être facilement visualisé sur la figure 1(a) en se souvenant que le style OB' est parallèle à l'axe des pôles.

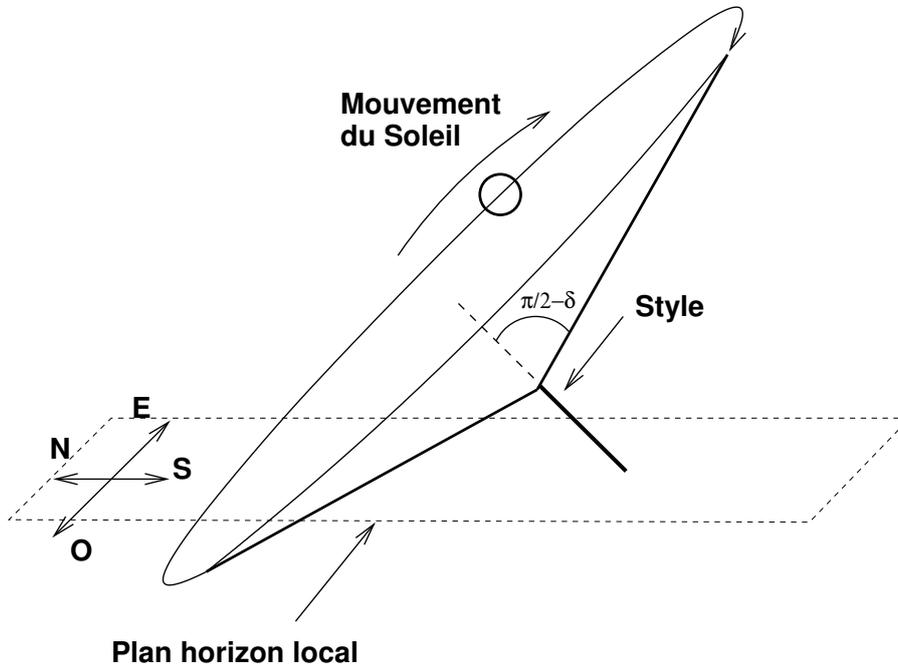


FIG. 4 – Cône balayé par le rayon vecteur \vec{s} au cours d'une journée.

Les lignes de déclinaison vont ainsi être définies comme l'intersection du cône précédemment défini et du plan horizontal du cadran solaire. D'un point de vue purement mathématique, cette intersection peut être un cercle, une ellipse, une parabole ou une hyperbole.

Par construction, si l'on considère un point M de la ligne de déclinaison (ses coordonnées sont $(x, y, 0)$), alors \vec{s} et $B'\vec{M}$ sont colinéaires (M est la projection de B' dans le plan suivant la direction du Soleil \vec{s} , autrement dit l'ombre du sommet B' du style). On en déduit donc

$$\vec{OB}' \cdot \vec{B'M} = -\|\vec{OB}'\| \cdot \|\vec{B'M}\| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta_s\right). \quad (26)$$

Sachant que

$$\vec{B'M} = \vec{OM} - \vec{OB}' = \begin{pmatrix} x - L_s \cos \phi \\ y \\ -L_s \sin \phi \end{pmatrix}. \quad (27)$$

après élévation au carré on trouve

$$x^2(\cos^2 \phi - \sin^2 \delta_s) - y^2 \sin^2 \delta_s + L_s^2 \cos^2 \delta_s - 2L_s x \cos \phi \cos^2 \delta_s = 0. \quad (28)$$

Après mise en forme et en profitant du fait que $\cos^2 \phi - \sin^2 \delta_s = \cos^2 \delta_s - \sin^2 \phi$, on obtient finalement

$$\left(L_s^2 \frac{\sin^2 \phi \cos^2 \delta_s \sin^2 \delta_s}{(\cos^2 \delta_s - \sin^2 \phi)^2} \right)^{-1} \left(x - \frac{L_s \cos \phi \cos^2 \delta_s}{\cos^2 \delta_s - \sin^2 \phi} \right)^2 - \left(L_s^2 \frac{\sin^2 \phi \cos^2 \delta_s}{\cos^2 \delta_s - \sin^2 \phi} \right)^{-1} y^2 = 1 \quad (29)$$

4.1 Lignes de déclinaison si le Soleil se couche

Pour des latitudes où le Soleil se couche tous les jours de l'année, on a $\cos^2 \delta_s - \sin^2 \phi > 0$, et on peut alors simplifier l'équation (29) en

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (30)$$

avec

$$x_0 = L \frac{\cos^2 \delta_s}{\tan \phi} \frac{1}{\cos^2 \delta_s - \sin^2 \phi}, \quad (31)$$

$$a^2 = L^2 \frac{\cos^2 \delta_s \sin^2 \delta_s}{(\cos^2 \delta_s - \sin^2 \phi)^2}, \quad (32)$$

et

$$b^2 = L^2 \frac{\cos^2 \delta_s}{\cos^2 \delta_s - \sin^2 \phi}. \quad (33)$$

L'équation (30) représente une *hyperbole* (voir figure 5). Ses asymptotes sont

$$y = \pm \frac{b}{a}(x - x_0) \quad (34)$$

et elles se croisent au point $(x_0, 0)$. On peut vérifier qu'on a bien, conformément à l'équation (22) :

$$\frac{b^2}{a^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \tan^2 A = \frac{\cos^2 \delta_s - \sin^2 \phi}{\sin^2 \delta_s}. \quad (35)$$

Les points de coordonnées $(x_0 \pm a, 0)$ (situés sur la courbe) sont nommés vertex.

Il est surprenant de constater que x_0 est la longueur moyenne de l'ombre à midi vrai pour les déclinaisons δ_s et $-\delta_s$. En effet,

$$\frac{1}{2} \frac{L}{\sin \phi} \left(\frac{\cos \delta_s}{\cos(\phi - \delta_s)} + \frac{\cos(-\delta_s)}{\cos(\phi + \delta_s)} \right) = L \frac{\cos^2 \delta_s}{\tan \phi} \frac{1}{\cos^2 \delta_s - \sin^2 \phi}. \quad (36)$$

On peut remarquer de façon plus générale que x_0 et les pentes $\pm \frac{b}{a}$ des asymptotes sont invariantes par la transformation $\delta_s \rightarrow -\delta_s$. Les lignes de déclinaison δ_s et $-\delta_s$ correspondent donc aux deux branches de la même hyperbole.

On peut tracer les lignes de déclinaison grâce à la formule

$$x = x_0 + a \sqrt{1 + \frac{y^2}{b^2}} \quad (37)$$

Pour $\delta_s = 0$, on obtient $a = 0$, et donc l'équation (37) se réduit à $x = x_0$, ce qui est bien une droite. Par ailleurs on vérifie bien que $x_0 = L/(\sin \phi \cos \phi)$, ce qui est conforme à l'équation (18).

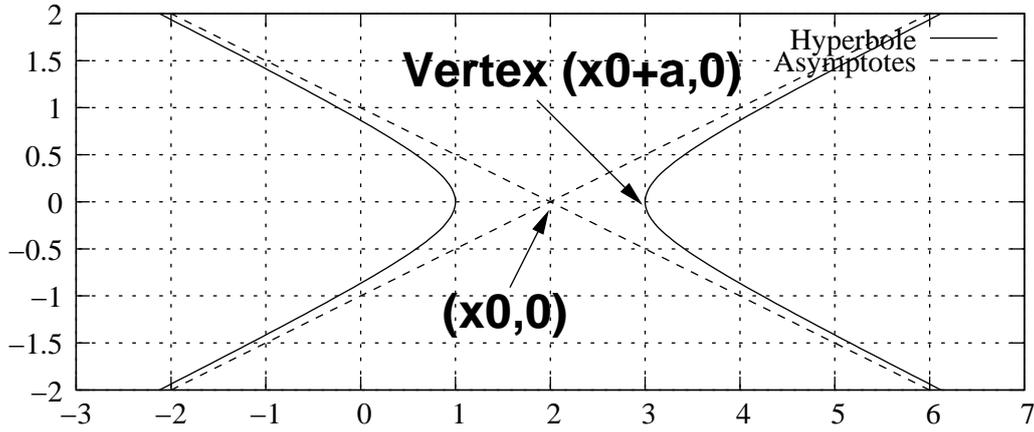


FIG. 5 – Représentation graphique d'une hyperbole

4.2 Lignes de déclinaison si le Soleil ne se couche pas

Si l'on se trouve à une latitude où le Soleil ne se couche pas un jour de déclinaison δ_s , alors $\cos^2 \delta_s - \sin^2 \phi < 0$, et l'équation (29) est alors celle d'une ellipse :

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (38)$$

avec

$$x_0 = L \frac{\cos^2 \delta_s}{\tan \phi} \frac{1}{\cos^2 \delta_s - \sin^2 \phi}, \quad (39)$$

$$a^2 = L^2 \frac{\cos^2 \delta_s \sin^2 \delta_s}{(\cos^2 \delta_s - \sin^2 \phi)^2}, \quad (40)$$

et

$$b^2 = L^2 \frac{\cos^2 \delta_s}{\sin^2 \phi - \cos^2 \delta_s}. \quad (41)$$

La transition entre la période où le Soleil se couche et la période où il ne se couche pas se fait lorsque $\cos^2 \delta_s - \sin^2 \phi = 0$, c'est-à-dire le jour où $\delta_s = \pi/2 - \phi$ dans l'hémisphère nord et $\delta_s = -\pi/2 - \phi$ dans l'hémisphère sud. Dans ce cas, l'équation (29) n'est pas utilisable (le dénominateur des différents termes est nul) et il faut alors revenir à l'équation (28), qui se simplifie pour donner (toujours en utilisant $\cos^2 \phi - \sin^2 \delta_s = \cos^2 \delta_s - \sin^2 \phi$) :

$$-y^2 \frac{1}{\tan^2 \phi} + L_s^2 - 2L_s x \cos \phi = 0. \quad (42)$$

La trajectoire décrite par l'ombre de l'extrémité du style ce jour particulier est donc une parabole.

4.3 Exemples de lignes de déclinaison

À l'aide des équations (30) et (38), on peut alors calculer facilement les lignes de déclinaison pour une latitude fixée. Nous avons choisi une latitude de 78° , pour laquelle il arrive que le Soleil ne se couche pas (et donc ne se lève pas également). Le résultat est présenté sur la figure 6. Les lignes ont été calculées pour les 20 mars, 30 mars, 21 avril, 11 juin et 2 octobre. Le point de contact entre le style et le plan horizontal est symbolisé par une croix.

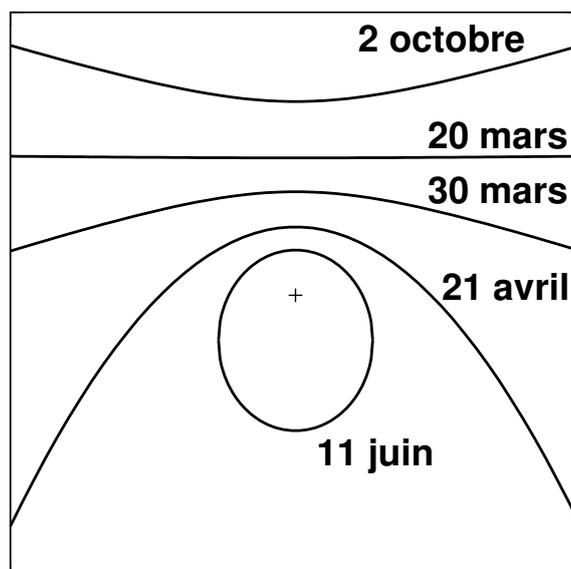


FIG. 6 – Lignes de déclinaison calculées pour une latitude de 78° à différentes dates

On observe quatre types de courbes : l'hyperbole, les 30 mars et 2 octobre, la ligne droite pour l'équinoxe, l'ellipse le 11 juin, et la parabole le 21 avril puisque ce jour là on a $\delta_s = 90^\circ - \phi = 12^\circ$.

5 Conclusion

Nous avons obtenu les équations cartésiennes des lignes de déclinaison dans le cas d'un cadran solaire horizontal à style incliné. Il est bien sûr possible d'étendre le calcul présenté ici aux cas d'un cadran vertical, vertical déclinant, incliné déclinant, les équations de la droite que parcourt l'ombre les jours d'équinoxe ont d'ailleurs déjà été publiées [1]. Dans tous les cas, on aura à déterminer l'équation de l'intersection d'un cône et d'un plan.

Références

- [1] Orlando TOMAS. Les cadrans solaires et l'astrolabe planisphérique sans l'usage de la trigonométrie sphérique. *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.*, 98(868(1)):1523–1576, novembre 2004.
- [2] Site de l'Institut de Mécanique Céleste et de Calcul des Éphémérides. <http://www.imcce.fr/fr/ephemerides/astronomie/Promenade/pages3/316.html>.
- [3] http://fred.elie.free.fr/cadrans_solaires.htm.

A Matrice de rotation

Soit M un point de coordonnées (x, y, z) dans le repère d'origine. Si le repère effectue une rotation autour de l'axe \vec{x} d'un angle θ , alors les nouvelles coordonnées de M sont :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (43)$$

Si le repère effectue une rotation autour de l'axe \vec{y} d'un angle θ , alors les nouvelles coordonnées de M sont :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (44)$$

B Coordonnées sphériques et cartésiennes

Soit M un point de coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) , ses coordonnées cartésiennes sont :

$$\begin{cases} x = r \cos \phi \cos \theta \\ y = r \cos \phi \sin \theta \\ z = r \sin \phi \end{cases} \quad (45)$$

C Relations utiles

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad (46)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad (47)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad (48)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \quad (49)$$

$$\sin^2 \theta = \frac{\tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} \quad (50)$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} \quad (51)$$

$$\tan^2 \theta = \frac{\sin^2 \theta}{1 - \sin^2 \theta} = \frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} \quad (52)$$