

Théorie du cadran à chapeau

Alexandre Vial

Article paru dans « Cadran Info » n°20 d'octobre 2009

1 Présentation

La première trace du cadran à chapeau que j'ai trouvée provient de l'ouvrage *Gnomonique graphique* de Joseph Mollet (exercice 11, page 62 : construire un cadran solaire sur une colonne cylindrique, surmontée d'un chapiteau circulaire d'un diamètre plus grand que celui de la colonne, de manière que l'heure soit indiquée par l'ombre de ce chapiteau), publié en 1820.

En fait, il est déjà suggéré dans les *Récréations mathématiques* de Jacques Ozanam (Tome 3, septième partie : gnomonique - Problème 28, page 256 : décrire un cadran sur la surface convexe d'un cylindre perpendiculaire à l'horizon, et immobile), nouvelle édition de 1778. Cependant, il y est précisé : « On pourroit aussi connoître l'heure par l'intersection du parallèle du soleil avec la ligne d'ombre du cylindre, comme l'enseigne M. Ozanam ; mais cette ligne étant toujours mal terminée, comme on l'a observé à l'égard des cadrans faits d'un globe, on ne doit point se servir de cette manière. » et la solution dans cet ouvrage correspond en fait à chercher l'intersection du bord inférieur de l'ombre du chapeau avec les lignes de hauteur du Soleil, telles que tracées pour le cadran de berger. Tout ce passe donc comme si on avait une infinité de styles contigus.

L'expérience montre cependant qu'il est tout à fait possible d'utiliser la ligne d'ombre du cylindre (voir par exemple les cylindres d'azimut de Joël Robic), et c'est donc cette solution, également retenue par J. Mollet (et plusieurs gnomonistes dont les réalisations sont visibles sur le site de Joël Robic), que je vais présenter ici.

2 Principe du calcul

A priori, le calcul peut sembler ardu, dans la mesure où l'on doit déterminer l'équation de l'ombre d'un disque sur un cylindre, puis trouver le point d'intersection avec la limite d'ombre du cylindre, comme on le voit sur la figure 1.

En fait les choses sont plus simple qu'il n'y paraît, car en fin de compte seul le point d'intersection nous intéresse, et il est assez aisé de le déterminer. Toute l'astuce consiste à déterminer quel point du bord du chapeau correspond à ce point d'ombre. La figure 2 permet de trouver facilement ce point.

On note R le rayon du chapeau, r le rayon du cylindre. Tous les rayons issus du Soleil sont parallèles entre eux. Le point d'intersection recherché est issu du point du bord du chapeau appartenant au plan tangent au cylindre à la limite d'ombre (plan contenant un rayon de soleil), et il est noté P sur la figure 2. On peut alors définir un style fictif de longueur $r' = \sqrt{R^2 - r^2}$, qui va permettre de déterminer la distance l le long de la limite d'ombre entre le haut du cylindre et le point d'intersection cherché, à savoir $l = r' \tan h$ avec h la hauteur du Soleil pour l'heure et le jour considéré.

Le tracé des lignes horaires est ensuite assez simple, puisque pour un angle horaire H et une déclinaison δ du Soleil, on calcule à l'aide des formules bien connues la hauteur h et l'azimut A du Soleil

$$\sin h = \cos \phi \cos \delta \cos H + \sin \phi \sin \delta, \quad (1)$$

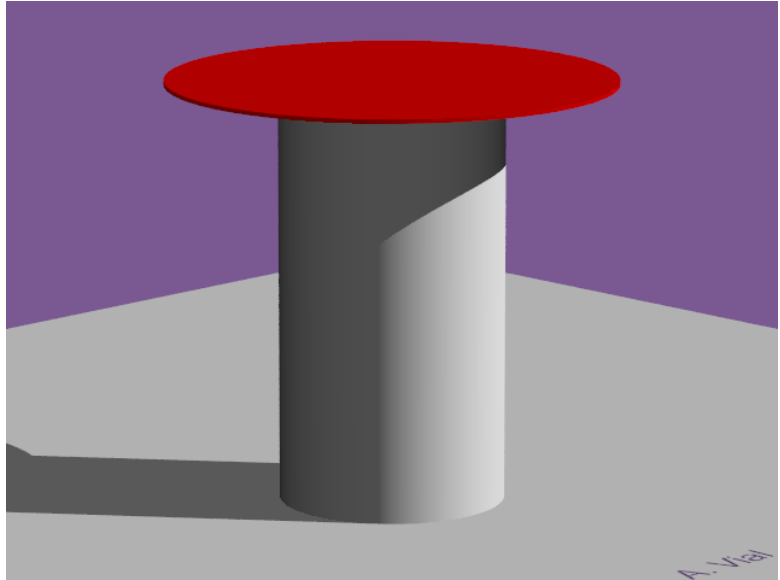


FIGURE 1 – Cadran à chapeau : version de base.

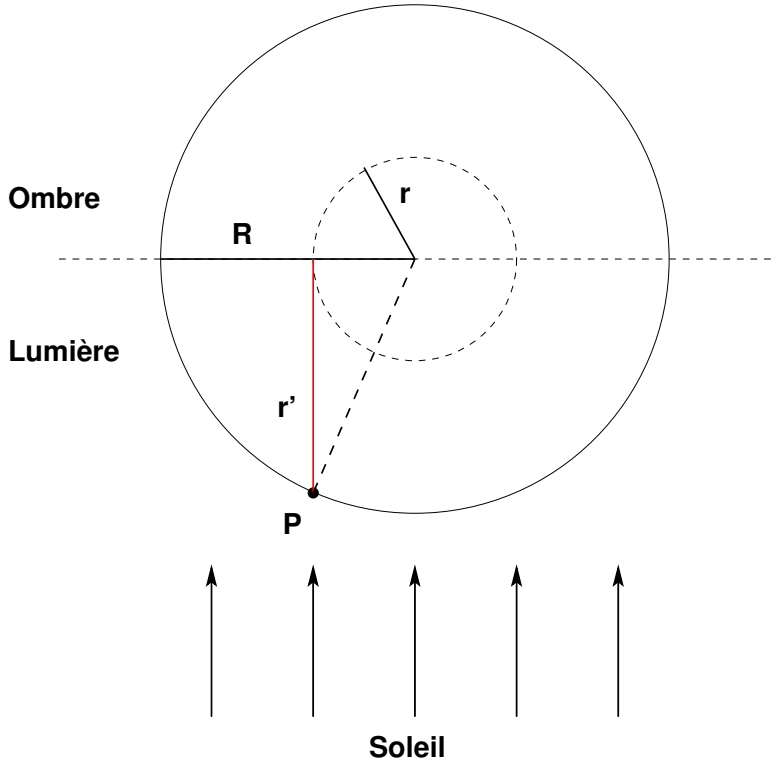


FIGURE 2 – Vue du dessus du cadran à chapeau.

$$\tan A = \frac{\sin H}{\sin \phi \cos H - \cos \phi \tan \delta'} \quad (2)$$

et on trace ensuite l en fonction de $-A$ (à cause de la convention sur le signe des angles horaires et des azimuts), pour obtenir une courbe semblable à celle présentée sur la figure 3 (l'équation du temps à été prise en compte).

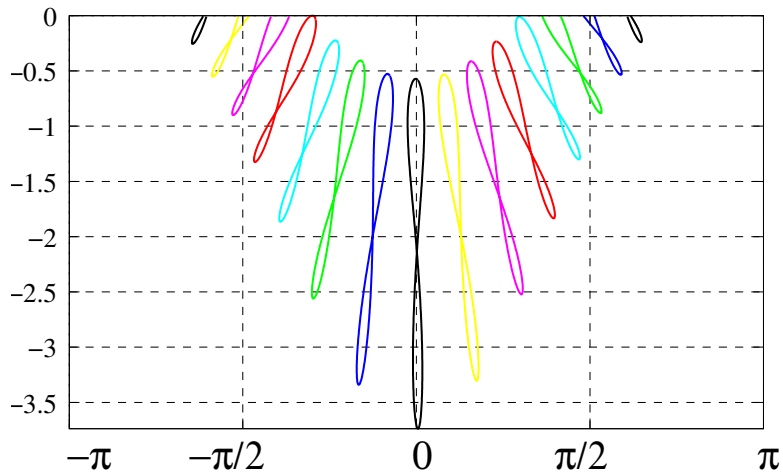
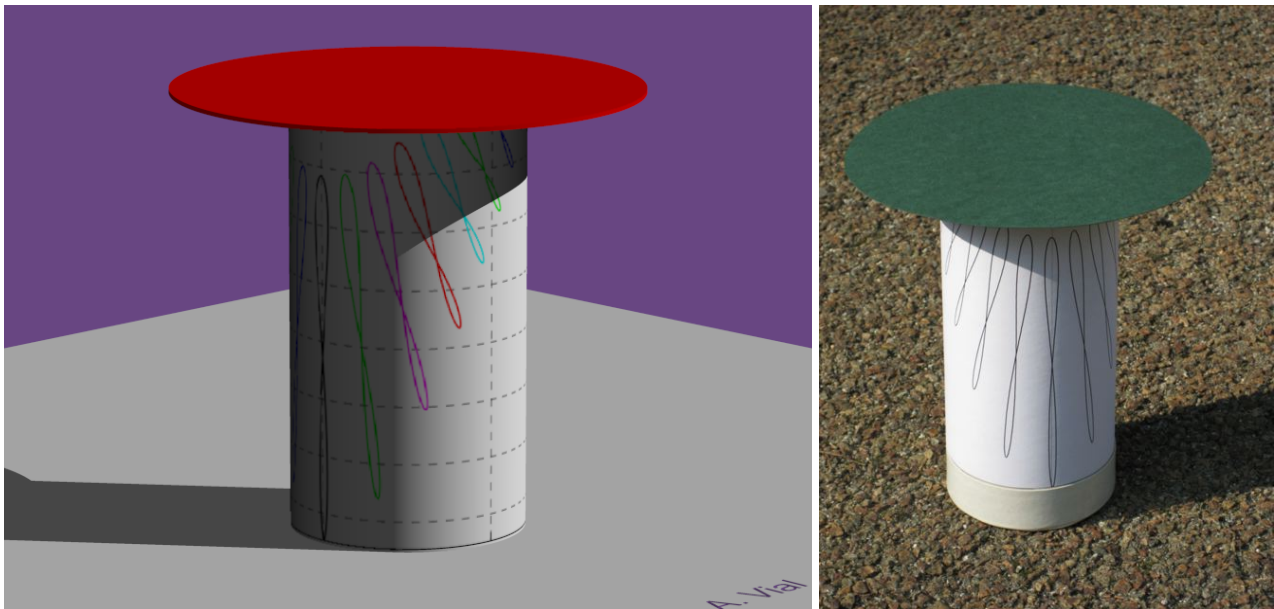


FIGURE 3 – Lignes horaires du cadran à chapeau, équation du temps incluse, pour une latitude $\phi = 48.3^\circ$ et un rapport $R/r = 2$.

Pour que le cadran soit utilisable en permanence, il faut que sa hauteur soit au moins égale à $h_{min} = r' \tan(90^\circ - \phi + 23.44^\circ)$ avec ϕ la latitude du lieu. Ainsi l'ombre la plus longue, obtenue à midi vrai au solstice d'été, ne dépassera pas au bas du cylindre. De même, pour que les lignes soient bien positionnées pour le placement ultérieur sur le cylindre, il faut que la figure 3 ait pour largeur $2\pi r$.

On obtient le cadran final en reportant le dessin de la figure 3 sur le cylindre, comme on peut le voir sur les figures 4(a) et 4(b).



(a) Dessin

(b) Réalisation

FIGURE 4 – Cadran à chapeau : version finale