Le savon qui rend fou

Alexandre Vial

20 février 2008

Résumé

On s'intéresse au film de savon entre deux anneaux. Quand le film existe-t-il ? Peut-on toujours le créer ?

1 Introduction

Les ouvrages traitant du calcul des variations présentent souvent des exemples simples d'application tels que la détermination de la distance la plus courte entre deux point dans un plan, ou encore la courbe plane passant par deux points et qui par rotation autour d'un axe génère la surface minimale [1, 2]. Ce dernier cas a la particularité de pouvoir décrire la forme du film de savon qui peut exister entre deux anneaux, dans la mesure où le film de savon cherche à minimiser son énergie, et donc sa surface. On montre que dans le cas où l'axe de rotation est l'axe des abscisses et pour deux points initiaux de coordonnées (a, b) et $(-a, b)$ la courbe cherchée a pour équation

$$y = c \cosh \frac{x}{c}, \tag{1}$$

avec la condition aux limites

$$b = c \cosh \frac{a}{c}. \tag{2}$$

La constante c représente l'ordonnée du point le plus bas de la courbe (voir la figure 1). Cette courbe a pour nom *chaînette*, et la surface engendrée est une *caténoïde*.

2 Existence d'une solution

Aussi surprenant que cela puisse paraître, il n'existe pas toujours de solution de la forme (1) vérifiant (2) [3, 4]. Réécrivons (2) sous la forme

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{a} \cosh \frac{a}{c}, \tag{3}$$

et posons

$$u = \frac{a}{c}, \tag{4}$$

$$\eta = \frac{b}{a}, \tag{5}$$

on doit alors chercher les solutions u de l'équation

$$\eta = \frac{\cosh u}{u}. \tag{6}$$

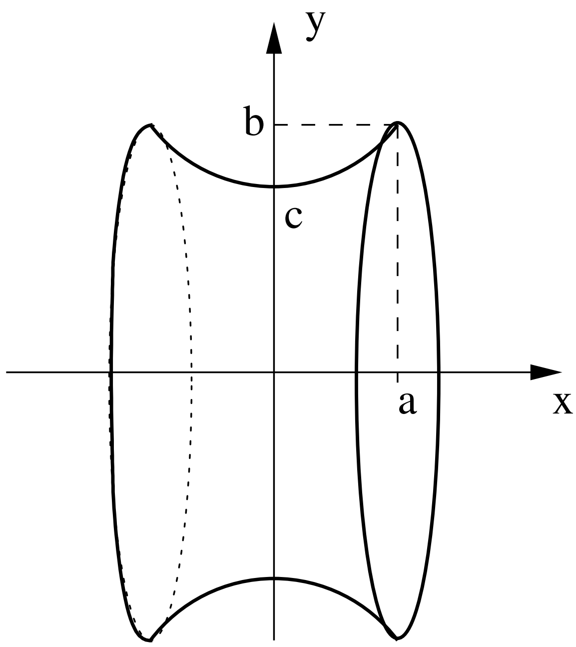

FIGURE 1 – Géométrie du problème.

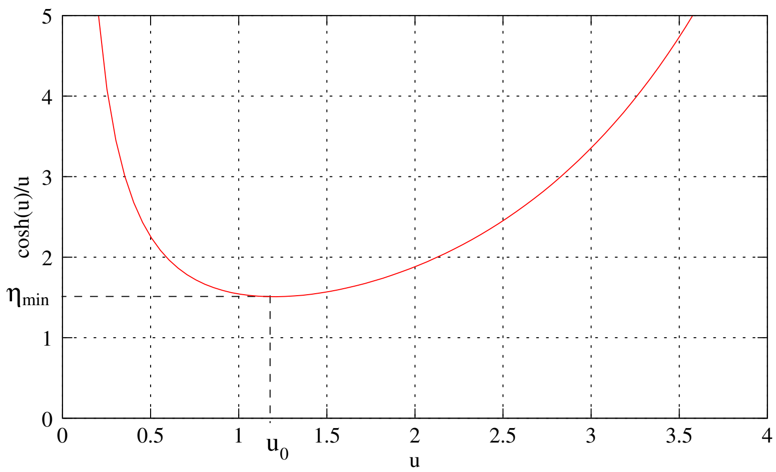

FIGURE 2 – Fonction $\cosh u/u$.

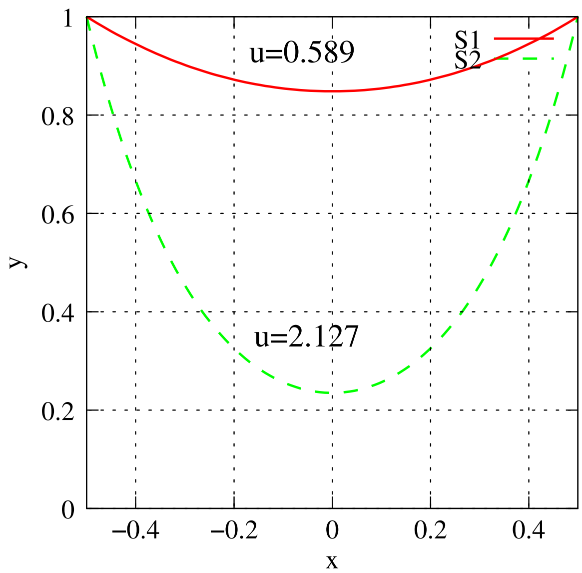

FIGURE 3 – Solutions du problème variationnel pour $\eta = 2$ (tracées avec $b = 1$).

La figure 2 permet de voir graphiquement qu'il existe une valeur η_{min} en dessous de laquelle il n'existe pas de solution.

Pour déterminer η_{min} on cherche tout d'abord la valeur u_0 qui minimise la fonction $\cosh(u)/u$, on calcul donc sa dérivée et on obtient l'équation

$$u_0 \tanh u_0 = 1, \tag{7}$$

dont la solution est

$$u_0 = 1,199678640... \tag{8}$$

On en déduit

$$\eta_{min} = 1,50887956... \tag{9}$$

Par conséquent, pour $\eta < \eta_{min}$, il n'existe pas de solution à l'équation (6) et le film de savon ne peut pas avoir la forme d'une caténoïde. Dans ce cas, il se forme deux films de savons sur chaque cercle limite, et on parle de *solution de Goldschmidt* [2]. Si $\eta = \eta_{min}$ alors il existe une solution unique, et pour $\eta > \eta_{min}$ il existe deux soutions à l'équation (6) (voir la figure 3). Dans ce dernier cas, on va voir que seule une des deux solutions correspond à un minimum de la surface.

3 Étude des solutions

D'après la figure 2, on voit que pour $\eta > \eta_{min}$, il existe deux valeurs de u qui vérifient (6). La première vérifie $u \in]0; u_0]$ et la seconde $u \in [u_0; +\infty[$. La surface de la caténoïde vaut

$$S = 2\pi \int_C y ds = 2\pi \int_C y\sqrt{dx^2 + dy^2} = 2\pi \int_{-a}^{a} y\sqrt{1 + \frac{dy}{dx}} dx = \pi c^2 \left(\sinh \frac{2a}{c} + \frac{2a}{c}\right). \tag{10}$$

On peut montrer analytiquement que c'est la solution u la plus petite (et donc la valeur c la plus grande) qui engendre la surface minimale [5]. La seconde valeur de u correspond à une surface maximale.

Ceci peut encore se vérifier graphiquement. En utilisant (2) dans (1), on obtient

$$y = \frac{b}{\cosh \frac{a}{c}} \cosh \frac{x}{c}, \tag{11}$$

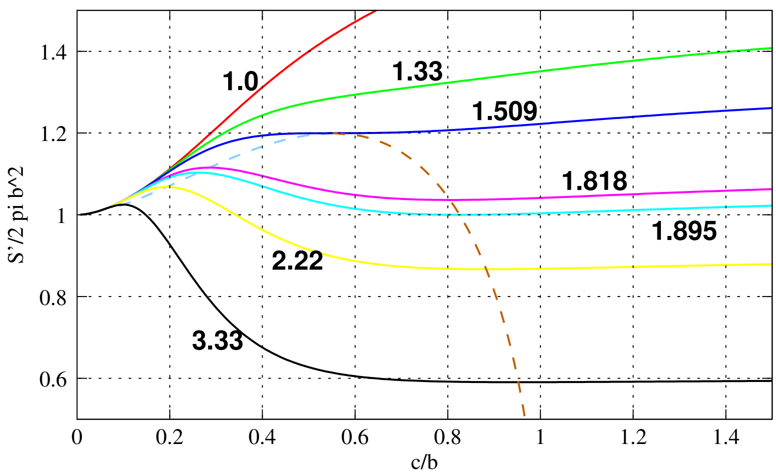

FIGURE 4 – Surface de la caténoïde normalisée par la solution de Goldschmidt pour différentes valeurs de η en fonction de c/b. La solution du problème variationnel est représentée en pointillé (d'après [5]).

et on peut observer comment la surface S' générée par cette courbe varie lorsque le paramètre c varie librement [5]. On trouve

$$S' = 2\pi b^2 \left[\sqrt{\tanh^2 \frac{a}{c} + \frac{c^2}{b^2}} \tanh \frac{a}{c} + \frac{c^2}{b^2} \mathrm{argsinh} \left(\frac{b}{c} \tanh \frac{a}{c} \right) \right]. \tag{12}$$

On a tracé sur la figure 4 la valeur de S' normalisée par la surface de la solution de Goldschmidt, c'est-à-dire $S'/2\pi b^2$, pour différente valeur de η, en fonction de c/b. Sur cette même figure, on a également représenté les valeurs de S' normalisées pour les valeurs $\frac{a}{c} = u$ solutions de (6) en pointillé. Plusieurs commentaires peuvent être faits :

– pour $\eta < \eta_{min}$, le minimum de la surface correspond bien à la solution de Goldschmidt, il n'y a pas de minimum correspondant à la solution « caténoïde »,
– pour $\eta = \eta_{min}$, il existe un point d'inflexion pour S', le lieu des solutions de (6) est tangent à cette courbe pour $c/b = 1/(\eta_{min} u_0) = 0,552434$,
– pour $\eta > \eta_{min}$, le lieu des solutions de (6) coupe chaque courbe en deux endroits particuliers : le maximum de S' (pour c petit donc u grand) et le minimum de S' (pour c grand donc u petit).

Concernant ce dernier points, il faut bien voir que le minimum peut n'être que local. Ainsi pour $\eta = 1,818$, la solution de Goldschmidt est bien celle qui donne la surface minimale, mais il existe un minimum local pour $c/b \approx 0,805$. On peut alors chercher à quelle condition la solution de (6) correspond à celle de Goldschmidt. Pour cela, il suffit de poser

$$S = \pi c^2 \left(\sinh \frac{2a}{c} + \frac{2a}{c} \right) = 2\pi b^2, \tag{13}$$

puis à l'aide de (2) et en définissant

$$\rho = \frac{b}{c}, \tag{14}$$

on arrive à l'équation [6]

$$\rho\sqrt{\rho^2 - 1} + \mathrm{argcosh}\rho - \rho^2 = 0, \tag{15}$$

dont la solution est

$$\rho_G = 1.2113614... \tag{16}$$

Sachant que $a/c = \text{argcosh}(b/c)$ on en déduit que $a/b = a/c \times c/b = \text{argcosh}(\rho)/\rho$ et donc

$$\eta_G = \frac{\rho_G}{\text{argcosh}\rho_G} = 1,895025... \tag{17}$$

La courbe correspondante a été tracée sur la figure 4, on voit bien que ses deux minima sont égaux et valent 1.

4 Conclusion

Pour résumer, si on appelle η le rapport diamètre sur distance des deux anneaux autour desquels on veut réaliser un film de savon :

- si $\eta < \eta_{min}$, alors il n'y a pas de solution sous la forme d'une caténoïde,
- si $\eta \geq \eta_{min}$, il existe une solution sous la forme d'une caténoïde, mais il ne s'agit d'un minimum absolu de la surface que si $\eta > \eta_G$.

Par conséquent, il n'est pas évident que pour $\eta_{min} < \eta < \eta_G$, il soit possible de créer le film de savon sous la forme d'une caténoïde, une faible perturbation risque de conduire le système à la solution de Goldschmidt. Il faut faire l'expérience !

Code 4.1 Programme de calcul des paramètres

```
%% Calculs des paramètres
%% Programme pour Octave 3.0

u0=fzero(inline('x*tanh(x)-1'),1)
eta_min=cosh(u0)/u0
rhoG=fzero(inline('rho*sqrt(rho^2-1)+acosh(rho)-rho^2'),1.2)
etaG=rhoG/acosh(rhoG)
```

u_0	$1,19967864025773$		
$\eta_{min} = \frac{\cosh u_0}{u_0}$	$1,50887956153832$	$\frac{1}{\eta_{min}} = \frac{a}{b}$	$0,662743419349181$
ρ_G	$1,21136142618849$		
$\eta_G = \frac{\rho_G}{\text{argcosh}\rho_G}$	$1,89502545541444$	$\frac{1}{\eta_G} = \frac{a}{b}$	$0,527697396962565$

TABLE 1 – Paramètres

Références

[1] Jean Marie Constant Duhamel: *Éléments de calcul infinitésimal*, tome 2, chapitre XXV. Mallet-Bachelier, 1856. En ligne.

[2] Herbert Goldstein: *Classical mechanics*, chapitre 2. Addison-Wesley Publishing Company, seconde édition, 1980.

[3] Robert Weinstock: *Calculus of variations*, chapitre 3. Dover publications, Inc., New York, 1974.

[4] Bruce van Brunt: *The calculus of variations*. Springer-Verlag New York, Inc., 2004.

[5] Loyal Durand: *Stability and oscillations of a soap film : an analytic treatment*. Am. J. Phys., 49(4) :334–343, 1981. Résumé.

[6] Eric W. Weisstein: *Surface of Revolution*. From MathWorld - A Wolfram Web Resource.