



Alexandre Vial

Présentation

Principe du calcul

Tracé des lignes

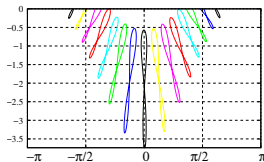
Résultat

# Théorie du cadran à chapeau

Alexandre Vial

SAF - Commission des cadrans solaires

30 mai 2009





Alexandre Vial

Présentation

Principe du calcul

Tracé des lignes

Résultat

## Petit historique et motivation

- *Gnomonique graphique* de Joseph Mollet (exercice 11, page 62 : construire un cadran solaire sur une colonne cylindrique, surmontée d'un chapiteau circulaire d'un diamètre plus grand que celui de la colonne, de manière que l'heure soit indiquée par l'ombre de ce chapiteau), publié en 1820



Alexandre Vial

Présentation

Principe du calcul

Tracé des lignes

Résultat

## Petit historique et motivation

- *Gnomonique graphique* de Joseph Mollet (exercice 11, page 62 : construire un cadran solaire sur une colonne cylindrique, surmontée d'un chapiteau circulaire d'un diamètre plus grand que celui de la colonne, de manière que l'heure soit indiquée par l'ombre de ce chapiteau), publié en 1820
- Déjà suggéré dans les *Récréations mathématiques* de Jacques Ozanam (Tome 3, septième partie : gnomonique - Problème 28, page 256 : décrire un cadran sur la surface convexe d'un cylindre perpendiculaire à l'horizon, et immobile), nouvelle édition de 1778



Alexandre Vial

Présentation

Principe du calcul

Tracé des lignes

Résultat

## Petit historique et motivation

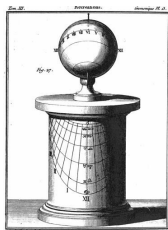
- *Gnomonique graphique* de Joseph Mollet (exercice 11, page 62 : construire un cadran solaire sur une colonne cylindrique, surmontée d'un chapiteau circulaire d'un diamètre plus grand que celui de la colonne, de manière que l'heure soit indiquée par l'ombre de ce chapiteau), publié en 1820
- Déjà suggéré dans les *Récréations mathématiques* de Jacques Ozanam (Tome 3, septième partie : gnomonique - Problème 28, page 256 : décrire un cadran sur la surface convexe d'un cylindre perpendiculaire à l'horizon, et immobile), nouvelle édition de 1778
- Et aussi, on m'a demandé des explications détaillées sur le calcul



Alexandre Vial

## Ce qu'en dit Ozanam

On pourroit aussi connoître l'heure par l'interfection du parallèle du soleil avec la ligne d'ombre du cylindre, comme l'enseigne M. Ozanam ; mais cette ligne étant toujours mal terminée, comme on l'a observé à l'égard des cadrans faits d'un globe, on ne doit point se servir de cette manière.



et la solution dans cet ouvrage correspond en fait à chercher l'intersection du bord inférieur de l'ombre du chapeau avec les lignes de hauteur du Soleil, telles que tracées pour le cadran de berger.

Présentation

Principe du calcul

Tracé des lignes

Résultat



## La jurisprudence «Robic»

- L'expérience montre cependant qu'il est tout à fait possible d'utiliser la ligne d'ombre du cylindre (voir par exemple les cylindres d'azimut de Joël Robic)

Alexandre Vial

Présentation

Principe du calcul

Tracé des lignes

Résultat



Alexandre Vial

Présentation

Principe du calcul

Tracé des lignes

Résultat

## La jurisprudence «Robic»

- L'expérience montre cependant qu'il est tout à fait possible d'utiliser la ligne d'ombre du cylindre (voir par exemple les cylindres d'azimut de Joël Robic)
- C'est la solution retenue par J. Mollet



Alexandre Vial

Présentation

Principe du calcul

Tracé des lignes

Résultat

## La jurisprudence «Robic»

- L'expérience montre cependant qu'il est tout à fait possible d'utiliser la ligne d'ombre du cylindre (voir par exemple les cylindres d'azimut de Joël Robic)
- C'est la solution retenue par J. Mollet
- C'est la solution retenue par plusieurs gnomonistes dont les réalisations sont visibles sur le site de Joël Robic)





Alexandre Vial

Présentation

Principe du calcul

Tracé des lignes

Résultat

## La jurisprudence «Robic»

- L'expérience montre cependant qu'il est tout à fait possible d'utiliser la ligne d'ombre du cylindre (voir par exemple les cylindres d'azimut de Joël Robic)
- C'est la solution retenue par J. Mollet
- C'est la solution retenue par plusieurs gnomonistes dont les réalisations sont visibles sur le site de Joël Robic)
- Donc c'est la solution que je présente !



Alexandre Vial

Présentation

Principe du calcul

Tracé des lignes

Résultat

## Principe du calcul (1)

*A priori ardu :*

- déterminer l'équation de l'ombre d'un disque sur un cylindre
- trouver le point d'intersection avec la limite d'ombre du cylindre

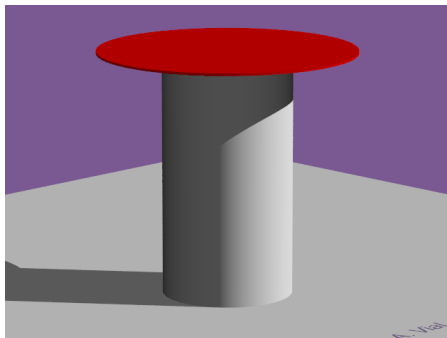


FIGURE: Cadran à chapeau : version de base.



Alexandre Vial

Présentation

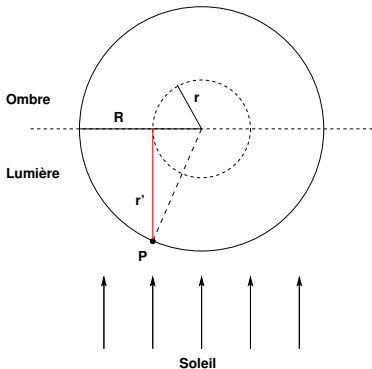
Principe du calcul

Tracé des lignes

Résultat

## Principe du calcul (2)

Mais *seul le point d'intersection nous intéresse*. Toute l'astuce consiste donc à déterminer quel point du bord du chapeau correspond à ce point d'ombre.



Tous les rayons issus du Soleil sont parallèles entre eux. Le point d'intersection recherché est issu du point du bord du chapeau appartenant au plan tangent au cylindre à la limite d'ombre (plan contenant un rayon de soleil).

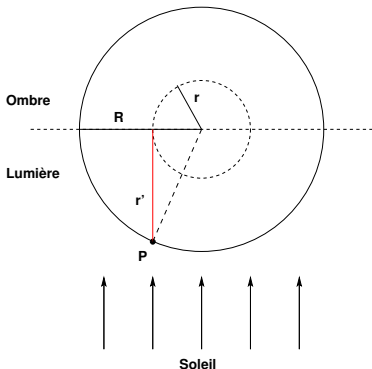


Alexandre Vial

## Principe du calcul (3)

On se ramène à quelque chose de bien connu :

- style fictif de longueur  $r' = \sqrt{R^2 - r^2}$ ,
- longueur de l'ombre du style fictif :  $l = r' \tan h$   
( $h$  : hauteur du Soleil)



Même principe que le cadran de berger !



Alexandre Vial

Présentation

Principe du calcul

Tracé des lignes

Résultat

## Tracé des lignes horaires (1)

Très simple : pour un angle horaire  $H$  et une déclinaison  $\delta$  du Soleil, on calcule à l'aide des formules bien connues la hauteur  $h$  et l'azimut  $A$  du Soleil

$$\sin h = \cos \phi \cos \delta \cos H + \sin \phi \sin \delta, \quad (1)$$

$$\tan A = \frac{\sin H}{\sin \phi \cos H - \cos \phi \tan \delta}, \quad (2)$$

et on trace ensuite  $l$  en fonction de  $-A$  (à cause de la convention sur le signe des angles horaires et des azimuts)



Alexandre Vial

Présentation

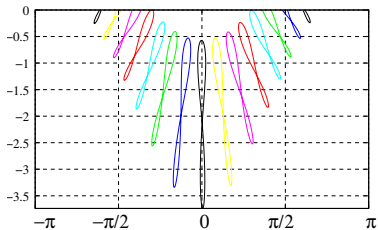
Principe du calcul

Tracé des lignes

Résultat

## Tracé des lignes horaires (2)

(l'équation du temps à été prise en compte).



**FIGURE:** Lignes horaires du cadran à chapeau, équation du temps incluse, pour une latitude  $\phi = 48.3^\circ$  et un rapport  $R/r = 2$ .

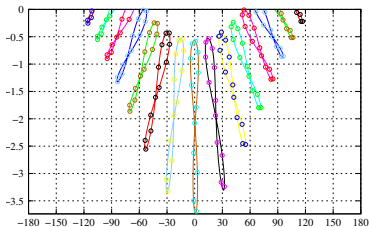
À ne pas oublier :

- cadran utilisable en permanence  
 $\Rightarrow h_{min} = r' \tan(90^\circ - \phi + 23.44^\circ)$
- lignes bien placées sur le cylindre : largeur de la figure =  $2\pi r$

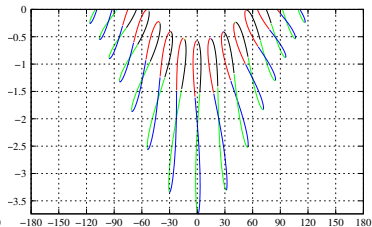


## Tracé des lignes horaires (3)

Quelques variations possibles



(a) 1er jour du mois



(b) Saisons

**FIGURE:** Lignes horaires du cadran à chapeau, équation du temps incluse, pour une latitude  $\phi = 48.3^\circ$  et un rapport  $R/r = 2$ .

Alexandre Vial

Présentation

Principe du calcul

Tracé des lignes

Résultat

# Résultat final

On obtient le cadran final en reportant le dessin sur le cylindre



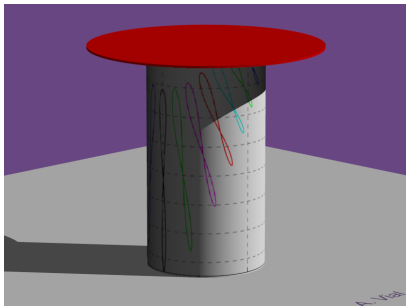
Alexandre Vial

Présentation

Principe du calcul

Tracé des lignes

Résultat



(a) Dessin



(b) Réalisation

**FIGURE:** Cadran à chapeau : version finale





Alexandre Vial

Présentation

Principe du calcul

Tracé des lignes

Résultat

## Pour approfondir le sujet

Que se passe-t-il si :

- on remplace le cylindre par un cône ?
- on remplace le chapeau circulaire par une ellipse ?
- on remplace le cylindre par un cylindre à base elliptique ?
- on combine les trois cas précédents ?