Ma banque, mes emprunts et mes intérêts

Alexandre Vial

10 janvier 2009

1 Les intérêts cumulés

Je place 100 € à 4% par an pendant un an. Donc au bout d'un an, j'ai $100 + 100.\frac{4}{100} = 100(1 + \frac{4}{100})$ =104 €.

Cependant, si je retire mon argent après seulement six mois, je n'aurai pas €102, mais 101,98 € (oui, ce n'est guère différent, mais essayez avec un taux de 22%). La raison en est que chaque mois, les intérêts gagnés sont pris en compte pour le calcul des intérêts du mois suivant. Il faut donc déterminer le taux mensuel T_m du placement à partir du taux annuel T_a.

Si on appelle S la somme initiale, après un mois on a $S.(1 + T_m)$, après deux mois $[S.(1 + T_m)](1 + T_m) = S.(1 + T_m)^2$, et après n mois $S.(1 + T_m)^n$. Donc pour calculer T_m, il faut résoudre $(1 + T_m)^{12} = 1 + T_a$ (puisqu'après un an, on a $S.(1 + T_m)^{12} = S.(1 + T_a)$), soit finalement $T_m = (1 + T_a)^{1/12} - 1$. Après six mois, il faut ainsi multiplier la somme initiale par $(1 + T_m)^6 = (1 + T_a)^{6/12} = \sqrt{1 + T_a}$ (ce qui n'est pas loin de $1 + T_a/2$ si T_a est petit devant 1, par exemple $T_a = 4\%$).

2 J'emprunte à ma banque

2.1 Remboursement mensuel

J'emprunte 1000 € (S) à 22% (T_a) par an sur $N = 48$ mois. Je définis $T_m = \dfrac{T_a}{12}$ (attention, ce n'est plus la même définition qu'auparavant, mais c'est bien ce que fait la banque), et $q = 1+T_m$. Je rembourse chaque mois une somme R, et après n mois, je dois à la banque c_n (qui correspond à la somme due le mois précédent augmentée des intérêts moins le remboursement mensuel) :

$$\begin{aligned}
c_0 &= S, && (1)\\
c_1 &= c_0.q - R, && (2)\\
c_2 &= c_1.q - R = c_0 q^2 - Rq - R, && (3)\\
c_3 &= c_2.q - R = c_0 q^3 - Rq^2 - Rq - R, && (4)\\
&\ldots && (5)\\
c_N &= c_0 q^N - R(q^{N-1} + q^{N-2} + \ldots + q^2 + q + 1) && (6)\\
&= c_0 q^N - R\frac{1-q^N}{1-q}, && (7)
\end{aligned}$$

or on doit avoir $c_N = 0$ (à la fin du prêt, je ne dois plus rien), donc on en déduit

$$\boxed{R = S.(1-q).\frac{q^N}{1-q^N} = S.\frac{T_m}{1-(1+T_m)^{-N}}.} \qquad (8)$$

Dans ce montant remboursé mensuellement, une partie correspond au remboursement des intérêts, $i_n = c_{n-1}.T_m$ (ce qu'il reste à rembourser multiplié par le taux), et la part du capital est $R - i_n = R - c_{n-1}.T_m$.

Le coût de l'emprunt est défini par $N.R - S$.

Application numérique : avec les valeurs données, on trouve $T_m = 1,833\%$, R =31,51 €, et un coût pour le prêt de 512,29 €.

2.2 Le seuil psychologique

On se sent mieux si chaque mois, on rembourse plus de capital que d'intérêts. On cherche donc la valeur de n telle que $i_n < R - i_n \Longrightarrow i_n < \frac{R}{2}$.

Après un peu de calcul, on trouve que le capital remboursé chaque mois dépasse les intérêts après $n_{1/2}$ mois, tel que

$$n_{1/2} = 1 + N - \frac{\ln 2}{\ln q}, \qquad (9)$$

résultat qui ne dépend pas de la somme empruntée, mais uniquement du taux mensuel et de la durée du prêt.

De manière plus générale, les intérêts représentent une proportion inférieure ou égale à $1/p$ du remboursement R à partir de $n_{1/p}$ mois, défini par

$$\boxed{n_{1/p} = 1 + N - \frac{\ln p - \ln(p-1)}{\ln q} = 1 + N + \frac{\ln\left(1-\frac{1}{p}\right)}{\ln q}.} \qquad (10)$$

Application numérique : $n_{1/2} = 10,85$, $n_{1/3} = 26,68$ et $n_{1/10} = 43,2$ (on peut arrondir à l'entier supérieur).

2.3 Autres seuils

2.3.1 Seuils liés au coût total

On peut chercher combien de temps est nécessaire afin que le montant restant à rembourser représente la proportion $1/u$ de ce qui sera dû au total (capital et intérêts), c'est-à-dire la valeur n telle que $c_n = \dfrac{NR}{u}$, et on trouve

$$\boxed{n_{1/u} = N + \frac{\ln[(1-q)N + u] - \ln u}{\ln q} = N + \frac{\ln\left(1 - \dfrac{T_m N}{u}\right)}{\ln(1+T_m)}.} \tag{11}$$

Application numérique : $n_{1/2} = 16,08$, $n_{1/3} = 28,89$ et $n_{1/10} = 42,93$.

2.3.2 Seuils liés au capital seul

Enfin, on cherche le moment où on aura remboursé la proportion $1/r$ du capital. Après n remboursements, le capital remboursé d_n s'élève à $nR - \sum_1^n i_n = nR - T_m \sum_1^n c_{n-1}$, or $c_0 + c_1 + c_2 + ... + c_n = q(c_0 + c_1 + c_2 + ... + c_{n-1}) - nR + S$, donc on en déduit que $\sum_1^n c_{n-1} = \dfrac{c_n + nR - S}{q-1}$, et pour finir

$$\boxed{d_n = nR - T_m \frac{c_n + nR - S}{q-1} = S - c_n.} \tag{12}$$

Épatant, non ? en fait c'est normal, ce que j'ai déjà payé, c'est la différence entre le total et ce que je dois encore rembourser. Et on cherche donc $n_{1/r}$ tel que $d_n = S/r$, ce qui revient à résoudre $S - c_n = S/r \Longrightarrow c_n = S\dfrac{r-1}{r}$, et on trouve

$$\boxed{n_{1/r} = \frac{\ln(r + q^N - 1) - \ln r}{\ln q} = \frac{\ln\left(1 + \dfrac{q^N - 1}{r}\right)}{\ln q}.} \tag{13}$$

Application numérique : $n_{1/2} = 29,07$, $n_{1/3} = 20,98$ et $n_{1/10} = 7,17$.

3 Emprunter ou payer, il faut choiser.

Pour faire des travaux, faut-il mieux que je paye directement de ma poche ou emprunter la somme nécessaire à la banque ? Comment se décider ? Étudions les différentes possibilités.

3.1 Je n'ai pas de capital mais des revenus

Je n'ai pas l'argent nécesssaire au financement des travaux, mais je peux rembourser une certaine somme chaque mois. Pas le choix, j'emprunte.

3.2 J'ai le capital, mais pas de revenus

J'ai l'argent nécessaire au financement des travaux, je le place à la banque, j'emprunte en parallèle une somme équivalente, et j'utilise mon placement pour rembourser les échéances. Dans ce cas, le calcul à effectuer pour savoir ce qui reste sur le compte est très proche de celui présenté dans la partie 2.1, à la différence que cette fois c'_n représente donc la somme présente sur mon compte, que je ne connais pas le taux mensuel $T'_m = x - 1$ (que je cherche), et qu'après N mois la somme restante c'_N ne doit pas être 0 mais égale au coût du prêt, à savoir $NR - S$. On doit donc résoudre l'équation (d'après (1)) $Sx^N - R\frac{1-x^N}{1-x} = NR - S$, soit encore

$$x^{N+1} - (1 + \frac{R}{S})x^N - (\frac{NR}{S} - 1)x + (N+1)\frac{R}{S} - 1 = 0. \tag{14}$$

Cette équation ne semble pas avoir de solution triviale, mais on peut la résoudre facilement à l'aide de l'algorithme de Newton-Raphson. Avec les valeurs utilisées précédemment, on trouve $x = 1,0263$, soit un taux annuel pour le placement de $36,6\%$! Si le taux du prêt et de 5%, alors le taux du placement doit être de $9,33\%$.

Il s'agit donc d'une très mauvaise idée. Dans la pratique, ce cas se distingue des autres car il n'y a pas d'apport extérieur d'argent chaque mois, et ne devrait pas être rencontré, en effet on imagine mal la banque prêter de l'argent si le client n'a pas de moyens de remboursement autres que celui de placer son capital à un taux introuvable.

3.3 J'ai le capital et des revenus, j'emprunte

J'ai l'argent nécessaire au financement des travaux, je le place à la banque, je n'y touche plus, j'emprunte en parallèle une somme équivalente, et je rembourse chaque mois comme dans le premier cas. Il suffit donc ici de déterminer le taux annuel du placement susceptible de compenser le coût après N mois, la formule est simplement

$$T'_m = \left(\frac{NR}{S}\right)^{\frac{1}{N}} - 1, \tag{15}$$

$$T'_a = \left(\frac{NR}{S}\right)^{\frac{12}{N}} - 1. \tag{16}$$

Si le taux du prêt est de 22%, le placement doit être à $10,894\%$, et pour un prêt à 5%, un placement à $2,537\%$ est suffisant. Il s'agit donc d'une très bonne solution. Le plus fort, c'est que si on allonge la durée du prêt, alors on peut placer son argent à un taux encore plus faible !

3.4 J'ai le capital et des revenus, je n'emprunte pas

J'ai l'argent nécessaire au financement des travaux, je paye cash, et je place chaque mois l'équivalent de ce que j'aurais remboursé si j'avais emprunté. Après N mois, avec un taux mensuel $T'_m = x - 1$, j'aurai à la banque $S' = R(x^{N-1} + x^{N-2} + ... + x^2 + x + 1) = R\frac{1 - x^N}{1 - x}$, qui est supérieure à $N.R$ puisque chaque mois je gagne des intérêts. Il s'agit donc de la solution la plus avantageuse, puisque pour un placement dont le taux vaut celui défini par l'équation (16), le cas précédent me rapporte juste $N.R$ (le capital initial plus les intérêts qui compensent exactement le coût du prêt).

4 Conclusion

Il n'y a pas de secret, plus on a d'argent, plus on peut en gagner. L'étude des différents cas dans la partie 3 montre que pour un même taux de placement, il vaut mieux déposer progressivement des sommes équivalentes à un remboursement fictif plutôt que bloquer le capital et le laisser fructifier. En réalité, les choses sont plus complexes, car les banques proposent souvent des taux plus avantageux pour une forte somme bloquée pendant une durée fixée, alors que des versements réguliers ne pourront être effectués que sur des placement à rendement plus faible (sans compter la déduction de frais divers et variés à chaque versement). Par ailleurs, il est plus sécurisant d'avoir un peu de marge financière, plutôt que de tout dépenser directement, même si cela a un coût. Enfin, pour paraphraser mon frère, « il y a un facteur que je t'avais mentionné et que tu n'as pas pris en compte dans ta conclusion, si jamais l'emprunteur se trouve dans l'incapacité de rembourser et que ce cas est couvert par son assurance (il faut bien que ça serve dès fois), alors il vaut mieux avoir emprunté que d'avoir payé cash, car dans le premier cas tu as toujours ton pactole placé en banque et ton prêt est remboursé par l'assurance, alors que dans le deuxième cas non ».