Passage au méridien et culmination : démonstration et simplification

Alexandre Vial

Article paru dans « Cadran Info » n°25 de mai 2012

Résumé

Ce document fait suite à la lecture d'un chapitre du livre de Denis Savoie, *La Gnomonique* [1], qui traite du sujet du passage au méridien et de la culmination du Soleil. La démonstration de l'angle horaire de culmination est différente de celle de Denis Savoie, qui consiste à développer z (distance zénithale du Soleil) en série en fonction de H (angle horaire), et diffère également d'une autre plus ancienne [2] basée sur le développement en série de la hauteur h en fonction de H.

1 Angle horaire de culmination

On part de la formule reliant la hauteur h du Soleil pour une latitude ϕ à sa déclinaison δ et à l'angle horaire H :

$$\begin{aligned} \sin h &= \sin\phi\sin\delta + \cos\phi\cos\delta\cos H \qquad (1)\\ &= f(\delta, H). \end{aligned}$$

$\sin h$ étant une fonction croissante de h si $0 < h < \pi/2$, on peut étudier directement la fonction f pour trouver le maximum de h. Celui-ci s'obtient en écrivant $df = 0$, soit en explicitant :

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial \delta} d\,\delta + \frac{\partial f}{\partial H} d\,H \\ &= (\sin\phi\cos\delta - \cos\phi\sin\delta\cos H) d\,\delta - \cos\phi\cos\delta\sin H d\,H \qquad (2)\\ &= 0, \end{aligned}$$

et donc pour finir

$$(\sin\phi\cos\delta - \cos\phi\sin\delta\cos H)\frac{d\delta}{dH} = \cos\phi\cos\delta\sin H. \qquad (3)$$

En utilisant la notation de D. Savoie $\Delta\delta = \dfrac{d\delta}{dH}$ (variation horaire de la déclinaison), on a

$$(\sin\phi\cos\delta - \cos\phi\sin\delta\cos H)\Delta\delta = \cos\phi\cos\delta\sin H. \qquad (4)$$

Il s'agit d'une équation transcendante, que l'on peut résoudre par itération. Cependant, il y a plus simple. $\Delta\delta$ étant très faible (δ et H sont deux fonctions du temps, mais δ varie d'environ $46°$ en six mois, alors que H varie de $15°$ par heure), on peut déduire de (4) que $\sin H$ et donc H le sera également. Par conséquent, on peut considérer que $\cos H \approx 1$, ce qui permet de simplifier le membre de gauche de (4) :

$$\begin{aligned} \sin\phi\cos\delta - \cos\phi\sin\delta\cos H &= \sin\phi\cos\delta - \cos\phi\sin\delta \qquad (5)\\ &= \sin(\phi - \delta), \qquad (6) \end{aligned}$$

et permet donc d'obtenir la relation

$$\sin H \quad = \quad \frac{\sin(\phi-\delta)}{\cos\phi\cos\delta}\Delta\delta \tag{7}$$

On peut également se contenter de la première simplification (5), ce qui donne

$$\sin H = (\tan\phi - \tan\delta)\Delta\delta. \tag{8}$$

La formule (7) diffère légèrement de celle donnée par D. Savoie, qui est en $\tan H$. Cependant, cette différence est en réalité négligeable, car comme on l'a dit auparavant, H étant très petit, on peut utiliser l'approximation $\sin H \approx \tan H \approx H$ sans modification sensible du résultat, ce qui conduit à la formule « définitive » donnant l'angle horaire de culmination du Soleil

$$H = (\tan\phi - \tan\delta)\Delta\delta. \tag{9}$$

Cette équation est toujours une équation transcendante, puisque δ n'est pas une constante, cependant sa variation temporelle est tellement faible par rapport à celle de H qu'il est inutile de procéder à plusieurs itérations pour affiner la valeur de H, le calcul direct est suffisant, en utilisant $\delta = \delta_0$, c'est-à-dire la valeur de la déclinaison au méridien.

On peut introduire la distance zénithale du Soleil au méridien $z = \phi - \delta_0$, qui permet d'écrire (7) sous la forme

$$\sin H \approx H = \frac{\sin z}{\cos\phi\cos\delta_0}\Delta\delta. \tag{10}$$

Les jours d'équinoxe, la formule (9) peut encore se simplifier en considérant la déclinaison comme pratiquement nulle, ce qui conduit à

$$H_{equinoxe} = \tan\phi\Delta\delta. \tag{11}$$

Utilisons cette dernière formule pour retrouver les résultats fournis par D. Savoie : on se place le 21 mars 2003 (équinoxe de printemps), on a $\Delta\delta = 1'/15°$. À Paris ($\phi = 48°50'11''$), on trouve $H = 17\,\mathrm{s}$, au Caire ($\phi = 30°$) on obtient $H = 9\,\mathrm{s}$, et pour $\phi = 60°$ on a $H = 26\,\mathrm{s}$. Ces valeurs correspondent bien à celles données dans l'ouvrage cité.

2 Variation de hauteur du Soleil

Afin de calculer la variation de hauteur du Soleil entre son passage au méridien et l'angle horaire H déterminé auparavant, repartons de l'équation (1), mais en explicitant $\delta = \delta_0 + \Delta\delta H$, en développant les termes en $\sin\delta$ et $\cos\delta$ et en effectuant un développement limité à l'ordre 2 des termes en $\cos H$. Après quelques lignes de calcul, on obtient :

$$\sin h = \sin h_0 + \Delta\delta H\sin(\phi-\delta_0) - \frac{H^2}{2}\cos\phi\cos\delta_0 - \frac{H^2}{2}\sin h_0\Delta\delta^2, \tag{12}$$

avec

$$\sin h_0 = \sin\phi\sin\delta_0 + \cos\phi\cos\delta_0. \tag{13}$$

Si l'on remplace H par son expression donnée par l'équation (10), on voit que le dernier terme obtenu dans (12) est en $\Delta\delta^4$, alors que les deux termes précédents sont en $\Delta\delta^2$. On va donc pouvoir négliger ce dernier terme par rapport aux deux autres. Par conséquent, en n'oubliant pas que $\sin(\phi - \delta_0) = \sin z = \cos h_0$, on trouve pour finir

$$\sin h = \sin h_0 + \frac{\sin^2 z\Delta\delta^2}{2\cos\phi\cos\delta_0}. \tag{14}$$

Comme par ailleurs, on peut écrire

$$\sin h = \sin(h_0 + \Delta h) = \sin h_0 + \Delta h \cos h_0 = \sin h_0 + \Delta h \sin z, \tag{15}$$

on en déduit pour finir

$$\Delta h = \frac{1}{2} \frac{\sin z}{\cos \phi \cos \delta_0} \Delta\delta^2. \tag{16}$$

Encore une fois, ce résultat diffère légèrement de celui donné par D. Savoie dans son ouvrage, qui est en $\tan \Delta z$, mais Δz (ou Δh) étant très petit, il n'y a pas de différence notable dans l'application numérique.

3 Remerciements

Je remercie Denis Savoie, qui m'a aimablement fourni une copie de ses notes de travail originales, ce qui m'a encouragé à persévérer dans le calcul Δh en poussant le développement limité à l'ordre 2 !

Références

[1] D. Savoie: *La gnomonique*, chapitre Miscellanea. Les belle lettres, 2007.

[2] L. Lallemand: *Sur la Hauteur de Culmination des Astres ayant un Mouvement en Déclinaison*. Ciel et Terre. Bulletin de la société belge d'astronomie, 40 :205–208, 1924.