

# Le problème brachistochrone et le calcul des variations

Alexandre Vial

16 mars 2008

## Résumé

On cherche à déterminer la trajectoire la plus rapide permettant à une masse ponctuelle uniquement soumise à la gravité d'aller d'un point A à un point B.

## 1 Introduction

Le problème de la trajectoire la plus rapide entre deux points (le problème brachistochrone) fut soumis par Jean Bernoulli à ses contemporains en 1696. Leibniz, Newton, de l'Hôpital ainsi que son frère Jacques Bernoulli trouvèrent la solution [1] : il s'agit d'une arche de cycloïde. La méthode classique pour résoudre le problème est le *calcul des variations*. Cependant, la méthode utilisée par Jean Bernoulli est basée sur une analogie avec l'optique [2], plus simple dans un premier temps, mais plus limitée aussi. Pour cette raison nous utiliserons l'analogie optique pour établir les équations de base, puis nous détaillerons le calcul des variations et présenterons quelques résultats auxquels il peut mener.

## 2 Étude théorique

### 2.1 Analogie avec l'optique

On sait que la lumière va d'un point à un autre par le chemin le plus rapide (principe de Fermat). Lors du passage d'un milieu d'indice  $n_1$  à un milieu d'indice  $n_2$ , on a  $n_1 \sin u_1 = n_2 \sin u_2$ , or la vitesse de la lumière valant  $c/n$ , on en déduit

$$\frac{\sin u}{v} = C = \frac{1}{v_{max}}. \quad (1)$$

Par ailleurs, la conservation de l'énergie implique

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy \Rightarrow v = \sqrt{2gy}. \quad (2)$$

Par conséquent on en déduit

$$\frac{\sin u}{\sqrt{y}} = C\sqrt{2g} \quad (3)$$

et

$$v_{max} = \sqrt{2gy_{max}}, \quad (4)$$

donc

$$C = \frac{1}{\sqrt{2gy_{max}}} \Rightarrow \sin u = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y_{max}}}. \quad (5)$$

Un simple dessin montre que  $\dot{y} = \frac{dy}{dx} = \tan(\pi/2 - u) = \cot u$ , et  $\cot^2 u = \frac{1}{\sin^2 u} - 1$  donc

$$\frac{1}{\sin^2 u} = 1 + \dot{y}^2 = \frac{y_{max}}{y}, \quad (6)$$

on obtient par conséquent l'équation différentielle caractéristique de la trajectoire

$$y(1 + \dot{y}^2) = y_{max}. \quad (7)$$

## 2.2 Solution analytique

On pose  $\dot{y} = \cot \frac{\theta}{2}$  et on trouve

$$x = \frac{y_{max}}{2}(\theta - \sin \theta), \quad (8)$$

$$y = \frac{y_{max}}{2}(1 - \cos \theta). \quad (9)$$

Il s'agit de l'équation paramétrique d'une cycloïde dont le cercle générateur a pour rayon  $R = \frac{y_{max}}{2}$  (figure 1).

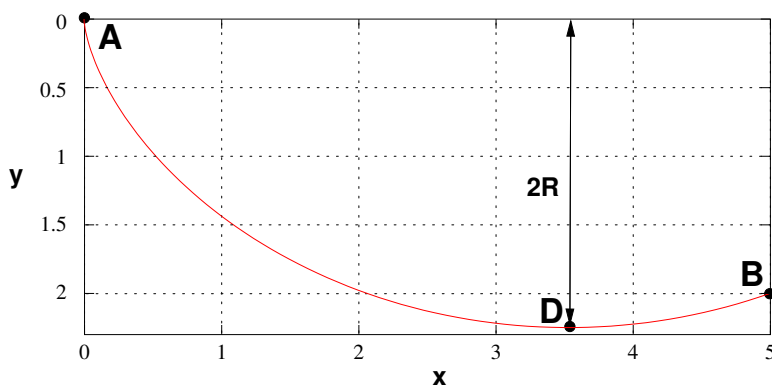


FIGURE 1 – Trajectoire de A à B.

On peut à présent déterminer le temps de parcours du point A ( $\theta = 0$ ) au point B ( $\theta = \theta_B$ ) :

$$t = \int_A^B dt = \int_A^B \frac{ds}{v}, \quad (10)$$

or

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{R^2[(1 - 2\cos \theta + \cos^2 \theta) + \sin^2 \theta]}d\theta = R\sqrt{2(1 - \cos \theta)}d\theta \quad (11)$$

donc avec (2) et (9) on obtient

$$t = \sqrt{\frac{R}{g}} \int_0^{\theta_B} d\theta = \sqrt{\frac{R}{g}} \theta_B. \quad (12)$$

Remarque : autant il est facile de trouver  $x$  et  $y$  à partir de  $R$  et  $\theta$ , autant l'inverse est compliqué. Le programme 2.1 permet de retrouver les paramètres  $R$  et  $\theta$  à l'aide d'une méthode de minimisation incluse dans le logiciel Octave. Une autre approche basée sur l'utilisation de la méthode de Newton-Raphson peut être utilisée [3].

**Exemple** : on cherche la brachistochrone entre les points A(0,0) et B(5,2) (coordonnées exprimées en mètres). Le programme 2.1 donne comme résultats  $R = 1,1244$  m,  $\theta = 3,8197$ , et un temps de trajet de 1.2931 s.

## 2.3 Solution approchée

Il est possible de trouver une solution approchée en utilisant les fonctions de minimisation fournies dans les tableurs ou les logiciels de calcul. Le principe du calcul est le suivant :

- on impose un certain nombre de valeurs  $x_k$  ( $1 < k < N$ )
- on cherche les valeurs  $y_k$  associées qui minimisent le temps de trajet (les valeurs  $y_1$  et  $y_N$  sont bien évidemment connues), calculé comme suit :
  1. on calcule l'énergie potentielle  $E_p(y_k) = -mgy_k$  (l'axe des  $y$  est orienté positivement vers le bas),
  2. on calcule l'énergie cinétique (sachant que  $E_c(x_1) = 0$ )  $E_c(x_k) = E_p(x_1) - E_p(x_k) = mv_k^2/2$ ,
  3. on en déduit la vitesse  $v_k = \sqrt{2E_c(x_k)/m}$ ,
  4. on approxime  $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$  par  $\Delta s_k = \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2}$ ,
  5. on calcule la vitesse moyenne sur la distance  $ds$  avec  $v_k^m = (v_k + v_{k+1})/2$ ,
  6. on approxime  $dt = ds/v$  avec  $\Delta t_k = \Delta s_k/v_k^m$ ,
  7. on calcule  $t_{total} = \sum_{k=1}^{N-1} \Delta t_k$ , qui est la quantité à minimiser.

Le programme 2.2 pour Octave réalise ces différentes étapes (minimisation à l'aide de la fonction `sqp`). On peut ensuite vérifier graphiquement que l'on retrouve un résultat proche de celui obtenu avec le programme précédent (et aussi comparer le temps estimé du trajet, ici pour des points identiques à l'exemple de la partie 2.2 on trouve  $t = 1,3072$  s.

## 2.4 Propriétés remarquables

### 2.4.1 Tautochronie

En partant du point d'altitude  $y = y_0$  (le cercle générateur a tourné de  $\theta_0$ ), la vitesse s'exprime comme

$$v = \sqrt{2g(y - y_0)} = \sqrt{2gR(\cos \theta_0 - \cos \theta)} \quad (13)$$

donc avec  $dt = ds/v$ , le temps pour aller du point C ( $x_0, y_0$ ) au point D le plus bas ( $\theta = \pi$ ) est

$$t = \sqrt{\frac{R}{g}} \int_{\theta_0}^{\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{\cos \theta_0 - \cos \theta}} d\theta \quad (14)$$

soit encore en posant  $u = \cos \frac{\theta}{2}$  (et  $u_0 = \cos \frac{\theta_0}{2}$ )

$$t = 2\sqrt{\frac{R}{g}} \int_0^{u_0} \frac{du}{\sqrt{u_0^2 - u^2}} = 2\sqrt{\frac{R}{g}} \left[ \arcsin \frac{u}{u_0} \right]_0^{u_0} = \sqrt{\frac{R}{g}} \pi \quad (15)$$

donc le temps pour atteindre le point le plus bas ne dépend pas du point de départ, c'est une courbe tautochrone !

### 2.4.2 Isochronie

Cette propriété se déduit de la tautochronie, la période du pendule cycloïdal vaut  $T = 4\sqrt{\frac{R}{g}}\pi = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}$ , elle est indépendante de l'amplitude des oscillations. Par ailleurs, cela correspond bien à la période d'un pendule simple de longueur  $2R$  dans l'approximation des faibles amplitudes d'oscillation (le cercle osculateur à la cycloïde en son point le plus bas à pour rayon  $2R$ ).

### 3 Calculs supplémentaires

#### 3.1 Trajet d'un point à une ligne verticale, puis d'une courbe à une autre

Après avoir résolu l'énigme de son frère, Jacques Bernoulli lui soumit en retour le problème suivant, variation du premier : quelle la trajectoire permettant d'aller le plus rapidement d'un point à une ligne verticale. Il s'agit bien sûr d'un arc de cycloïde, mais parmi toutes les cycloïdes passant par le point d'origine et un point de la droite, laquelle est-ce ? On peut encore une fois résoudre ce problème à l'aide des variations ou à l'aide d'une méthode plus géométrique [4], mais nous allons résoudre ce problème à l'aide d'une simple dérivation.

On fixe la distance  $D$  de la droite verticale à l'origine, par conséquent on peut exprimer  $R$  en fonction de  $D$  et  $\theta$

$$x = R(\theta - \sin \theta) = D \Rightarrow R = \frac{D}{\theta - \sin \theta}, \quad (16)$$

et on peut exprimer le temps de parcours uniquement en fonction de  $\theta$

$$t = \sqrt{\frac{R}{g}}\theta = \sqrt{\frac{D}{g}} \cdot \sqrt{\frac{\theta^2}{\theta - \sin \theta}}. \quad (17)$$

On peut alors étudier la variation de  $t$  en fonction de  $\theta$ , ou encore plus simplement celle de  $t^2$

$$\frac{d(t^2)}{d\theta} = \frac{D}{g} \cdot \frac{\theta^2(1 + \cos \theta) - 2\theta \sin \theta}{(\theta - \sin \theta)^2}, \quad (18)$$

et on vérifie que

$$\frac{d(t^2)}{d\theta} = 0 \Rightarrow \theta = \pi, \quad (19)$$

donc la cycloïde cherchée a pour paramètres  $\theta = \pi$  et  $R = \frac{D}{\pi}$ , et la trajectoire au point d'arrivée sur la droite est perpendiculaire à cette dernière. On peut montrer de manière générale que la brachistochrone coupe à angle droit la courbe d'arrivée [5] quelle qu'elle soit, et pour des points de départ d'arrivée se trouvant sur deux courbes distinctes, le trajet donnant le temps de parcours le plus court entre ces deux courbes est comme déjà indiqué perpendiculaire à la courbe d'arrivée, mais en plus les tangentes aux courbes aux points de départ et d'arrivée sont parallèles entre elles [6]. Cette propriété est illustrée par la figure 2.

#### 3.2 Bille qui roule

Dans la pratique, l'expérience n'est pas réalisée avec un point matériel pesant qui glisse sans frottement, mais avec une bille qui roule. Il faut donc en tenir compte dans la définition de l'énergie cinétique, qui inclut un terme dépendant du moment d'inertie de la bille [3, 7]. Pour une sphère,  $J = \frac{2}{5}mr^2$ , par conséquent  $E_c = \frac{1}{2}(m + \frac{2}{5}m)v^2 = \frac{7}{5} \cdot \frac{1}{2}mv^2$ . Reprenant l'équation (12), on en conclut que

$$t_{bille} = \sqrt{\frac{7}{5}}t = \sqrt{\frac{7}{5}}\sqrt{\frac{R}{g}}\theta. \quad (20)$$

Il faut également bien voir que ce temps correspond à celui que mettrait le centre de masse de la bille parcourant la cycloïde. Or celui-ci parcourt une courbe « parallèle » à la cycloïde, mais qui n'est pas une cycloïde [7]. Par conséquent, il faut tenir compte de cette trajectoire modifiée pour calculer le vrai temps de parcours théorique tenant compte du rayon de la bille (ou alors modifier la trajectoire de manière à ce que ce soit bien le centre de la sphère qui parcourt la cycloïde initiale).

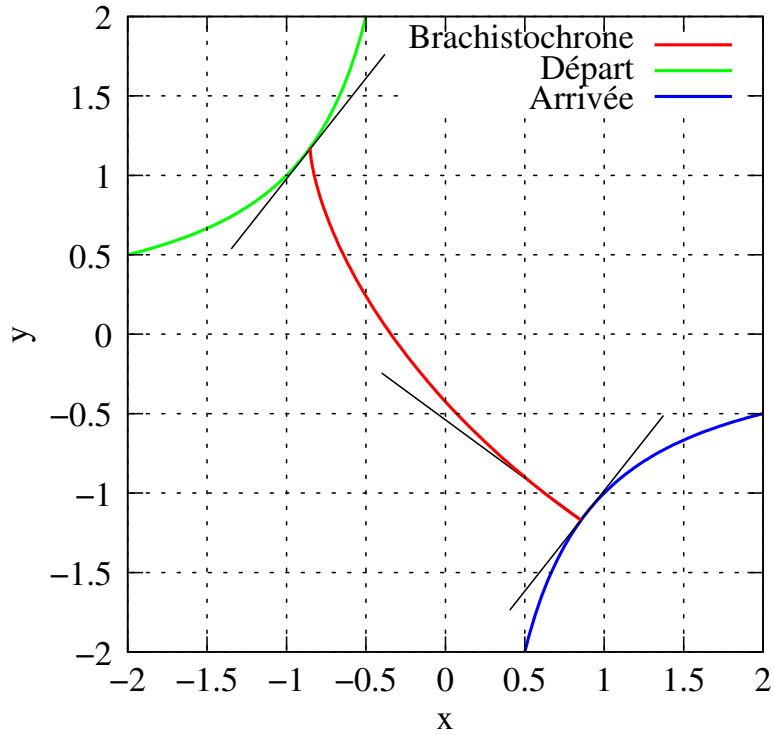


FIGURE 2 – Trajectoire la plus rapide entre deux courbes (ici les deux parties de la courbe  $y = 1/x$ ).

## 4 Calcul des variations

On cherche à minimiser

$$t = \int_A^B \frac{ds}{v}, \quad (21)$$

que l'on peut encore exprimer grâce aux relations (2) et

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = dx \sqrt{1 + \dot{y}^2} \quad (22)$$

comme

$$t = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{1 + \dot{y}^2}{2g(y - y_1)}} dx \quad (23)$$

(on a volontairement inclus une dépendance en  $y_1$  dans (23) afin de pouvoir tenir compte par la suite d'un point de départ variable, le cas d'un point de départ fixe pouvant se ramener par changement de repère à  $y_1=0$ ).

### 4.1 Limites fixes

Soit une fonctionnelle définie par

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{F}(x, y, \dot{y}) dx, \quad (24)$$

où les bornes  $x_1$  et  $x_2$  sont fixes. La variation de cette fonctionnelle est nulle si  $\mathcal{F}$  vérifie l'équation d'Euler-Lagrange [8, 9] :

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{y}} \right) = 0. \quad (25)$$

Si de plus  $\mathcal{F}$  ne dépend pas explicitement de  $x$ , on peut alors utiliser l'identité de Beltrami :

$$\mathcal{F} - \dot{y} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{y}} = c \quad (26)$$

où  $c$  est une constante à déterminer à partir des conditions initiales.

Dans le cas qui nous intéresse,

$$\mathcal{F}(x, y, \dot{y}) = \sqrt{\frac{1 + \dot{y}^2}{2g(y - y_1)}}, \quad (27)$$

on peut donc utiliser (26), ce qui mène à

$$(y - y_1) \cdot (1 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2gc^2}, \quad (28)$$

qui est bien semblable à l'équation (7) avec  $y_{max} = 1/(2gc^2)$  et  $y_1 = 0$ .

## 4.2 Limites variables

### 4.2.1 Point de départ fixe

Pour simplifier, on va considérer que le points de départ est fixe, mais que le point d'arrivée est susceptible de se déplacer sur la courbe décrite par  $y = \varphi(x)$ . Dans ce cas, on montre que  $\mathcal{F}$  doit non seulement vérifier l'équation (25), mais aussi ce qu'on appelle la *condition de transversalité* [10] :

$$\mathcal{F} |_{x_2} + (\dot{\varphi}(x_2) - \dot{y}(x_2)) \left( \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{y}} \right) |_{x_2} = 0. \quad (29)$$

Reprenant la définition de  $\mathcal{F}$  donnée par (27) pour le problème brachistochrone, on obtient alors

$$1 + \dot{y}(x_2) \dot{\varphi}(x_2) = 0 = \left( \frac{1}{\dot{y}(x_2)} \right) \cdot \left( \frac{1}{\dot{\varphi}(x_2)} \right), \quad (30)$$

ce qui exprime bien que les tangentes à la cycloïde et à la courbe d'arrivée sont perpendiculaires au point d'arrivée puisque le produit scalaire de leurs vecteurs directeurs est nul. On retrouve bien la propriété illustrée par la figure 2 et énoncée dans la partie 3.1.

### 4.2.2 Cas général

Considérons que le point de départ se trouve sur une courbe décrite par  $h(x, y) = 0$ , et que le point d'arrivée se trouve sur  $g(x, y) = 0$ . On doit alors vérifier (25), mais aussi [8]

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{y}} |_{x_2} = \frac{\frac{\partial g}{\partial y_2} \mathcal{F} |_{x_2}}{\left( \frac{\partial g}{\partial x_2} \right) + \dot{y}(x_2) \left( \frac{\partial g}{\partial y_2} \right)} \quad (31)$$

et

$$\frac{\frac{\partial h}{\partial y_1} \mathcal{F} |_{x_1}}{\left( \frac{\partial h}{\partial x_1} \right) + \dot{y}(x_1) \left( \frac{\partial h}{\partial y_1} \right)} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{y}} |_{x_1} + \frac{\frac{\partial h}{\partial x_1}}{\left( \frac{\partial h}{\partial x_1} \right) + \dot{y}(x_1) \left( \frac{\partial h}{\partial y_1} \right)} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y_1} dx = 0. \quad (32)$$

En utilisant dans (31) les relations

$$dg = \frac{\partial g}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial g}{\partial y_2} dy_2 = 0 \Rightarrow \frac{dy_2}{dx_2} = -\frac{\partial g}{\partial x_2} \cdot \left( \frac{\partial g}{\partial y_2} \right)^{-1} = \dot{\varphi}(x_2), \quad (33)$$

on retrouve facilement (29), et finalement (30) pour notre définition particulière de  $\mathcal{F}$ .

Toujours pour la brachistochrone, d'après (27) on voit que

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y_1}, \quad (34)$$

donc avec (25) l'intégrale dans (32) peut se simplifier et on trouve

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{y}} \Big|_{x_2} \frac{\partial h}{\partial x_1} + \left( \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{y}} \dot{y} - \mathcal{F} \right) \Big|_{x_1} \frac{\partial h}{\partial y_1} = 0. \quad (35)$$

Comme  $\mathcal{F}$  ne dépend pas explicitement de  $x$ , on peut utiliser l'identité de Beltrami (26), par conséquent l'expression entre parenthèse calculée en  $x_1$  est constante et donc la même en  $x_2$ , et on obtient pour finir

$$1 - \dot{y}(x_2) \left( \frac{\partial h}{\partial x_1} \cdot \left( \frac{\partial h}{\partial y_1} \right)^{-1} \right) = 0, \quad (36)$$

et grâce à une relation similaire à (33), on en déduit bien que la tangente à la courbe de départ est perpendiculaire à la tangente à la courbe brachistochrone au point d'arrivée, et par conséquent parallèle à la tangente à la courbe d'arrivée au point d'arrivée (figure 2).

## Références

- [1] [The brachistochrone problem.](#)
- [2] Herman Erlichson: *Johann Bernoulli's brachistochrone solution using Fermat's principle of least time.* Eur. J. Phys., 20(5) :299–304, 1999. [Résumé.](#)
- [3] Philippe Grillot, Gilles Charles et Charles de Izarra: *Approche quantitative du brachistochrone.* Bull. Un. Prof. Phys. Chim., 101(897) :999–1009, 2007. [Résumé.](#)
- [4] Paul Joseph Serret: *Des méthodes en géométrie.* Mallet-Bachelier, 1855. [En ligne.](#)
- [5] Jules Marie Louis Vieille: *Cours complémentaire d'analyse et de mécanique rationnelle.* Bachelier, 1851. [En ligne.](#)
- [6] Charles Sturm: *Cours d'analyse de l'École Polytechnique*, tome 2. Gauthier-Villars, Paris, seconde édition, 1864. [En ligne sur le site de la BNF.](#)
- [7] Eric Rodgers: *Brachistochrone and Tautochrone Curves for Rolling Bodies.* Am. J. Phys., 14(4) :249–252, 1946. <http://link.aip.org/link/?AJP/14/249/1>.
- [8] Robert Weinstock: *Calculus of variations*, chapitre 3. Dover publications, Inc., New York, 1974.
- [9] Bruce van Brunt: *The calculus of variations.* Springer-Verlag New York, Inc., 2004.
- [10] Jean Pierre Brossard: *Mécanique générale*, chapitre Dynamique : optimisation. Techniques de l'Ingénieur, 1997. [Sommaire en ligne.](#)

---

**Code 2.1** Programme de détermination du rayon et de l'angle

---

```
%% Determination des parametres de la brachistochrone qui passe par
%% A et B (xA=0, yA=0)
%% calcul du temps entre A et B
%% Programme pour Octave 3.0

clear *

function obj=fun1(p)
    R=p(1);
    theta=p(2);

    xe=R*(theta-sin(theta));
    ye=R*(1-cos(theta));

    global xB yB %% valeurs definie dans le prog principal
    obj=(xB-xe)^2+(yB-ye)^2;
end

%% point d'arrivee
global xB yB

xB=input('x final (>0) : ');
yB=input('y final (>0) : ');

p0=[1;pi/2];
t=cputime();
[p, obj, info, iter, nf, lambda]=sqp(p0,@fun1,[],[]);
[p, obj, info]=sqp(p0,@fun1,[],[])
t = cputime() - t;
printf("Elapsed time = %f\n\n\n",t);

Rayon=p(1)
theta=p(2)
g=9.81;
temps_trajet=sqrt(Rayon/g)*theta

tt=linspace(0,theta,100);
xx=Rayon*(tt-sin(tt));
yy=Rayon*(1-cos(tt));
plot(xx,-yy)
```

---



---

**Code 2.2** Programme approximant la solution pour des abscisses fixées

---

```
%% Pb brachistochrone
%% Programme pour Octave 3.0

clear *

function obj=temps(h)
    m=1;
    g=9.81;

    global x hi hf
    n=length(x);

    h(1)=hi;
    h(n)=hf;

    ep=-m*g*h; % orientation des y vers le bas
    ec=zeros(1,n);
    vm=zeros(1,n);
    s=zeros(1,n);

    ec=ep(1)-ep;
    v=sqrt(2*ec/m);
    vm(2:n)=(v(1:n-1)+v(2:n))/2;
    s(2:n)=sqrt((x(2:n)-x(1:n-1)).^2+(h(2:n)-h(1:n-1)).^2);

    obj=sum(s(2:n)./vm(2:n)); % temps
end

%% CI
global x hi hf

xi=0
xf=input('x final (>0) : ')
hi=0
hf=input('y final (>0) : ')
nbpts=11
x=linspace(xi,xf,nbpts)';

h0=linspace(hi,hf,nbpts)';

t=cputime();
[h, obj, info]=sqp(h0,@temps,[],[])
t = cputime() - t;
printf("Elapsed time = %f\n\n\n",t);

plot(x,h)
```

---