Le bol retourné

Alexandre Vial

23 décembre 2013

Résumé

Quelle hauteur d'eau permet de soulever un bol hémisphérique à l'envers ?

1 Pression et force

On considère un bol de forme hémisphérique, de rayon R, d'épaisseur $e << R$, de masse volumique ρ_{bol} posé à l'envers. Il contient un liquide de masse volumique ρ, dont la hauteur h peut-être modifiée grâce à un trou sur le sommet du bol. On note $z = R\sin\theta$ et $h = R\sin\theta_0$.

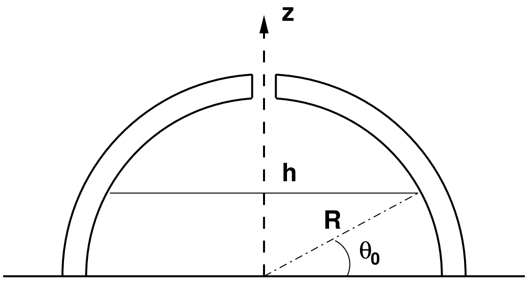

FIGURE 1 – Schéma du bol retourné.

La pression à une hauteur z vaut

$$p(z) = p_0 - \rho g(z - h). \tag{1}$$

Pour calculer la force élémentaire qu'exerce le liquide sur un élément de surface $d\vec{s}$ tel que

$$d\vec{s} = Rd\phi R\cos\theta d\theta\vec{e}_r \tag{2}$$

il suffit de calculer

$$d\vec{f} = pd\vec{s} = (p_0 - \rho gR(\sin\theta - \sin\theta_0))\cos\theta R^2 d\phi d\theta. \tag{3}$$

p_0 contribue à la force exercée sur le bol à l'intérieur et à l'extérieur, donc les deux contributions vont se compenser, la force totale résultante n'en dépend pas, et par symétrie, cette force sera orientée verticalement, vers le haut (c'est donc la projection de la force élémentaire sur l'axe vertical qui est utile, ce qui fait apparaitre un terme $\sin\theta$ supplémentaire) :

$$f_z = \rho gR^3 \iint (\sin\theta_0 - \sin\theta)\cos\theta\sin\theta d\theta d\phi. \tag{4}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} f_z &= 2\pi R^3 \rho g \int_0^{\theta_0} (\sin\theta_0 \sin\theta \cos\theta - \sin^2\theta \cos\theta) d\theta & (5) \\ &= 2\pi R^3 \rho g \left(\sin\theta_0 \left[\frac{\sin^2\theta}{2} \right]_0^{\theta_0} - \left[\frac{\sin^3\theta}{3} \right]_0^{\theta_0} \right) & (6) \\ &= \frac{1}{3} \pi \rho g R^3 \sin^3\theta_0 & (7) \\ &= \frac{1}{3} \pi \rho g h^3. & (8) \end{aligned}$$

Simple non ?

2 Hauteur limite

Le bol se soulève si la force calculée précédemment est supérieure au poids du bol : $f_z \geq P_{bol}$. Or

$$P_{bol} = (S_{bol} e \rho_{bol}) g = \frac{1}{2} 4\pi R^2 e \rho_{bol} g. \tag{9}$$

Ce qui conduit à

$$h_{lim}^3 = 6R^2 e \frac{\rho_{bol}}{\rho} \tag{10}$$

ou encore

$$h_{lim} = \sqrt[3]{6R^2 e \frac{\rho_{bol}}{\rho}}. \tag{11}$$